

## Wpływ metody określenia lokalnych wag kryteriów w analizie wielokryterialnej

The effect of the method of determination of local weights  
of criteria in multi-criteria analysis

Joanna Jaroszewicz

Politechnika Warszawska, Wydział Geodezji i Kartografii  
Katedra Gospodarki Przestrzennej i Nauk o Środowisku Przyrodniczym

**Słowa kluczowe:** przestrzenna analiza wielokryterialna, wagi lokalne, analiza czułości *ad hoc*  
Keywords: spatial multi-criteria analysis, local weights, *ad hoc* sensitive analysis

### Wstęp

Jednym z częściej stosowanych podejść do problematyki analizy wielokryterialnej są te, oparte na wieloatrybutowej teorii użyteczności (ang. MAUT – *multiattribute utility theory*). Addytywna, liniowa postać funkcji użyteczności jest postacią najprostszą i jednocześnie najbardziej rozpowszechnioną (von Nitzsch, Weber, 1993). W podejściu deterministycznym funkcja ta określana jest mianem funkcji wartości  $V$  (Keeney, 1992). Dla każdej alternatywy  $A_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ , addytywna postać funkcji wartości  $V_i(A_i)$ , addytywna postać funkcji wartości  $V_i(A_i)$  jest określona następującym wzorem:

$$V_i(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j v_j(a_{ij}) \quad (1)$$

gdzie:

- $a_{ij}$  – wartość atrybutu  $j$ -tego kryterium  $K_j$  dla  $i$ -tej alternatywy  $A_i$
- $v_j$  – funkcja wartości określająca preferencję decydenta odnośnie wartości atrybutów  $j$ -tego kryterium  $K_j$ , przy czym:  $0 \leq v_j(a_{ij}) \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$
- $w_j$  – stała skalująca dla  $j$ -tego kryterium  $K_j$  (nazywana również wagą istotności), przy czym:  $0 \leq w_j \leq 1$  oraz  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$

W procesie podejmowania decyzji kluczową rolę odgrywa ocena konsekwencji dokonanego wyboru. Wagi istotności kryteriów określają względną istotność spodziewanych konsekwencji wyboru lepszych wartości atrybutu kryterium  $K_j$  nad spodziewanymi konsekwencjami wybrania lepszych wartości kryterium  $K_i$  (Keeney, 1992). W podejściu deterministycznym zakłada się, że konsekwencje te są znane. Zdefiniowanie wag istotności wymaga

przynajmniej określenia: jednostki pomiaru wartości atrybutu danego kryterium, zakresu tych wartości oraz kompromisu względem pozostałych kryteriów (Keeney, 1992; Malczewski, 1999). Wagi wyznaczone w oparciu o zakres wartości atrybutu danego kryterium mogą być traktowane jako normatywne wartości wag (von Nitzsch, Weber, 1993). Jest to tak zwana zasada zakresowej czułości (Keeney, 1992; von Nitzsch, Weber, 1993; Fischer, 1995). Proces nadawania wag kryteriów i ich właściwa interpretacja są kluczowe dla prawidłowego przebiegu analizy (Choo i in., 1999) oraz dla zrozumienia jej wyników przez uczestników procesu decyzyjnego (Lai, Hopkins, 1989; Saltelli i in., 1999).

W podejściu globalnym do analiz wielokryterialnych, wspierających proces podejmowania decyzji, zakłada się, iż w przestrzeni geograficznej zarówno funkcja wartości  $v_j$ , jak i waga istotności  $w_j$  są stałe na całym obszarze analizy (Malczewski, Rinner, 2015). Dobór metody wyznaczania wag globalnych był przedmiotem wielu analiz (m.in. Kobryń, Tarnacka, 2015; Kumar i in., 2015). W przestrzennych analizach wielokryterialnych z wykorzystaniem GIS istnieje możliwość założenia przestrzennej niejednorodności zarówno funkcji wartości, jak i wag istotności (Feick, Hall, 2004; Ligmann-Zielinska, Jankowski, 2008, 2012; Malczewski, 2011; Şalap-Ayça, Jankowski, 2016). Prowadzi to w konsekwencji do wyznaczenia lokalnej postaci funkcji wartości oraz lokalnych wag istotności. Wagi lokalne określane są również jako wagi przestrzenne (Ligmann-Zielinska, Jankowski, 2012).

W artykule, na podstawie literatury, omówiono metody wyznaczania przestrzennych wag istotności związane z: lokalnymi zakresami wartości (Malczewski, 2011), lokalnymi współczynnikami entropii (Malczewski, Rinner, 2015) oraz redystrybucją wagi całkowitej opartą na tak zwanych lokalizacjach referencyjnych (Ligmann-Zielinska, Jankowski, 2012). Wagi tego typu są nazywane wagami *a posteriori*, gdyż wyznaczone są na podstawie znanych wartości atrybutów (Kao, 2010). Na podstawie prostego hipotetycznego przykładu z dwoma kryteriami stwierdzono, że w przypadku metody związanej z lokalizacjami referencyjnymi, w celu spełniania założeń wynikających z teorii użyteczności, konieczne jest dokonanie normalizacji wyznaczonych wag lokalnych. Normalizacja wag w tej metodzie prowadzi do odmiennej ich interpretacji. Dokonano również porównania wyników addytywnej postaci funkcji użyteczności, w zależności od doboru metody wyznaczania wag kryteriów. Porównanie to stanowi aspekt analizy czułości, która określana jest jako lokalna (jednoaspektowa) analiza czułości (Ligmann-Zielinska, Jankowski, 2008) oraz jako nie-probabilistyczna analiza *ad hoc* (Feick, Hall, 2004). Takie podejście jest stosunkowo często stosowane (m.in. Triantaphyllou, 1997; Chen i in., 2009; Kobryń, Tarnacka, 2015).

## Lokalne wagi kryteriów

Lokalne wagi kryteriów zakładają zmienną wartość wagi danego kryterium w przestrzeni geograficznej. W metodach lokalnego zakresu wartości oraz lokalnych wartości entropii, wagi wyznaczone są dla sąsiedztw definiujących podzbiory alternatyw zlokalizowanych w ich granicach (Feick, Hall, 2004; Malczewski, Rinner, 2015).

### Metoda lokalnych wag kryteriów opartych na lokalnych zakresach wartości atrybutów

Malczewski (2011) zastosował przestrzenne wagi kryteriów, wyznaczone w oparciu o lokalne zakresy wartości atrybutów, w postaci:

$$w_j^q = \frac{\frac{w_j r_j^q}{r_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{w_j r_j^q}{r_j}} \quad \text{przy czym: } 0 \leq w_j^q \leq 1 \text{ oraz } \sum_{j=1}^n w_j^q = 1 \quad (2)$$

gdzie:  $r_j^q$  to lokalny zakres wartości w sąsiedztwie  $q$ ,  
 $w_j$  – waga globalna,  
 $r_j$  – globalny zakres wartości.

### Metoda lokalnych wag kryteriów opartych na lokalnych miarach entropii

Metoda ta oparta jest na koncepcji entropii informacji (szumu informacyjnego) (Shannon, Weaver, 1947). Wagi kryteriów mogą być oszacowane na podstawie ilości informacji zawartej w każdym kryterium  $K_j$ , wyrażonej poprzez wartość entropii  $E_{K_j}$ , obliczaną na podstawie wartości atrybutów  $a_{ij}$  (Nijkamp, Delft, 1977; Malczewski, Rinner, 2015). Wartości entropii mogą być również wyznaczone lokalnie w przyjętych sąsiedztwach  $q = 1, 2, \dots, g$ . Dla  $q$ -tego sąsiedztwa, wagi lokalne wyznaczone są w następujący sposób (Malczewski, Rinner, 2015):

$$w_{E_j}^q = \frac{b_j^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q} \quad \text{przy czym } 0 \leq w_{E_j}^q \leq 1 \text{ oraz } \sum_{j=1}^n w_{E_j}^q = 1 \quad (3)$$

gdzie lokalny stopień zróżnicowania informacji  $b_j^q$  zawartej w zbiorze wartości  $j$ -tego kryterium:

$$b_j^q = 1 - E_j^q \quad (4)$$

wyznaczony jest na podstawie lokalnie wyznaczonej wartości miary entropii:

$$E_j^q = \frac{\sum_{i \in q} p_{ij}^q \ln(p_{ij}^q)}{\ln(|q|)} \quad (5)$$

przy czym, lokalnie wyznaczone wartości pomocnicze  $p_{ij}^q$  obliczane są na podstawie wartości kryteriów alternatyw zlokalizowanych w danym sąsiedztwie:

$$p_{ij}^q = \frac{a_{ij}^q}{\sum_{i \in q} a_{ij}^q} \quad (6)$$

gdzie:  $a_{ij}^q$  – jest wartością  $j$ -tego kryterium dla  $i$ -tej alternatywy zlokalizowanej w  $q$ -tym sąsiedztwie, natomiast  $|q|$  – jest licznoscią (rozmiarem) zbioru  $q$  – innymi słowy liczbą alternatyw decyzyjnych w  $q$ -tym sąsiedztwie. Dla danych rastrowych będzie to liczba pikseli.

### Metoda wyznaczenia przestrzennych wag w oparciu o lokalizacje referencyjne

Ligman-Zieliska i Jankowski (2012) zaproponowali wprowadzenie do przestrzennej analizy wielokryterialnej zbioru zewnętrznie definiowanych lokalizacji referencyjnych, względem których wyznaczana jest relacja odległości modyfikująca przestrzennie wagi istotności kryteriów. W celu wyznaczenia przestrzennych wag, autorzy metody wprowadzili koncepcję „wagi całkowitej”  $WC_j$ , stanowiącej sumę wag dla danego kryterium  $K_j$  we wszystkich alternatywach  $A_i$ . Przy założeniu stałych wartości wag globalnych, waga całkowita jest obliczona ze wzoru:

$$WC_j = m \times w_j \quad \text{gdzie: } m - \text{liczba alternatyw} \quad (7)$$

Waga całkowita jest rozdzielana (redystrybuowana) między lokalizacje alternatyw decyzyjnych w sposób niejednorodny – zależny od relacji odległości alternatywy decyzyjnej  $A_i$  od najbliższej lokalizacji referencyjnej  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) dla  $j$ -tego kryterium, przy czym znormalizowane odległości  $d^s_{ij}$  są wyznaczane za pomocą transformacji liniowej:

$$d^s_{ij} = \frac{\min_i \{d_{ij}\}}{d_{ij}} \quad (8)$$

Autorzy metody zaproponowali by wagi wyrównane relacją odległości były obliczane jako:

$$w_{ij} = w_j \frac{d^s_{ij}}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d^s_{ij}} \quad (9)$$

Można zauważyć, że ponieważ w przedstawionej przez Ligman-Zielińską i Jankowskiego (2012) koncepcji  $WC_j = m \times w_j$ , to przekształcając powyższy wzór otrzymamy:

$$w_{ij} = WC_j \frac{d^s_{ij}}{\sum_{i=1}^m d^s_{ij}} \quad (10)$$

Oznaczając:  $p_{ij} = \frac{d^s_{ij}}{\sum_{i=1}^m d^s_{ij}}$ , wzór ten przyjmie postać:

$$w_{ij} = WC_j \times p_{ij} \quad (11)$$

W metodzie tej wagi lokalne  $w_{ij}$  otrzymywane są na drodze redystrybucji wagi całkowitej dla danego kryterium  $WC_j$  proporcjonalnie do wartości  $p_{ij}$ . W dalszej części artykułu, na podstawie prostego przykładu zostanie wykazane, że wyznaczone w ten sposób wagi lokalne nie spełniają standardowych założeń, tj. nie ma gwarancji, iż otrzymane wartości  $w_{ij}$  spełniają warunki:  $0 \leq w_{ij} \leq 1$  oraz  $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$ . Jeżeli w analizie jest konieczne spełnienie tych założeń, otrzymane w wyniku procedury wagi lokalne  $w_{ij}$  powinny być dodatkowo znormalizowane:

$$w'_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

Ponieważ  $w_{ij} = WC_j \times p_{ij}$ , zatem:  $w'_{ij} = \frac{WC_j \times p_{ij}}{\sum_{j=1}^n (WC_j \times p_{ij})}$ . Pamiętając, że  $WC_j = m \times w_j$ , ostatecznie mamy:

$$w'_{ij} = \frac{w_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_j p_{ij}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Następuje redystrybucja wagi globalnej  $w_j$ , a nie całkowitej  $WC_j$ , proporcjonalnie do wartości  $p_{ij}$ , podobnie jak wagi globalnej proporcjonalnie do lokalnego zakresu wartości w metodzie lokalnych zakresów wartości.

## Eksperyment

Opracowano prosty przykład oparty na dwóch hipotetycznych kryteriach o wartościach atrybutów przedstawionych na rysunku 1.

kryterium 1	kryterium 2	schemat																																				
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>9</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>2</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>7</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	9	2	2	3	3	8	9	8	2	9	8	7	7	1	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table>	3	3	9	8	1	2	2	2	3	3	5	4	2	2	5	5	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%;">blok 1 q = 1</td> <td style="width: 50%;">blok 2 q = 2</td> </tr> <tr> <td>blok 3 q = 3</td> <td>blok 4 q = 4</td> </tr> </table>	blok 1 q = 1	blok 2 q = 2	blok 3 q = 3	blok 4 q = 4
1	2	9	2																																			
2	3	3	8																																			
9	8	2	9																																			
8	7	7	1																																			
3	3	9	8																																			
1	2	2	2																																			
3	3	5	4																																			
2	2	5	5																																			
blok 1 q = 1	blok 2 q = 2																																					
blok 3 q = 3	blok 4 q = 4																																					

**Rysunek 1.** Wartości atrybutów kryterium 1 ( $K_1$ ) i kryterium 2 ( $K_2$ ) oraz schemat podziału na cztery bloki określające sąsiedztwa (źródło: opracowanie własne)

Obszar analizy został podzielony na cztery bloki. Założono, że pożądaný kierunek zmian wartości atrybutów jest następujący „im wyższa wartość tym lepiej”. Wartości hipotecznych kryteriów zostały tak dobrane by umożliwić analizę zróżnicowanych przypadków wartości atrybutów:

- BLOK 1:  $K_1$  i  $K_2$  – mała rozpiętość i niskie wartości
- BLOK 2:  $K_1$  i  $K_2$  – duża rozpiętość
- BLOK 3:  $K_1$  i  $K_2$  – mała rozpiętość,  $K_1$  – wysokie wartości,  $K_2$  – niskie wartości
- BLOK 4:  $K_1$  – duża rozpiętość,  $K_2$  – mała rozpiętość i średnie wartości

Dodatkowo, dla metody opartej na lokalizacjach referencyjnych, przyjęto lokalizacje pojedynczych punktów referencyjnych dla obydwu kryteriów (rysunek 2).

	Schemat 2a	Schemat 2b																																
<p><b>Rysunek 2.</b> Schemat położenia lokalizacji referencyjnej dla kryterium <math>K_1</math> na schemacie 2a oraz dla kryterium <math>K_2</math> na schemacie 2b; dla uproszczenia za miarę odległości przyjęto liczbę pikseli (źródło: opracowanie własne)</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> </table>	4	3	2	1	4	3	2	2	4	3	3	3	4	4	4	4	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	2	2	4	3	2	1
4	3	2	1																															
4	3	2	2																															
4	3	3	3																															
4	4	4	4																															
4	4	4	4																															
4	3	3	3																															
4	3	2	2																															
4	3	2	1																															

W pierwszym etapie wyznaczono wagi globalne. W przykładzie przedstawionym na rysunku 1 globalne zakresy wartości atrybutów dla  $K_1$  i  $K_2$  są jednakowe, stąd wagi globalne wyznaczone w oparciu o zakres wartości (wzór 2) wynoszą:  $w_1 = w_2 = 0,5$ . Wagi globalne wyznaczone metodą współczynników entropii wyniosły  $w_{E1} = 0,624$  oraz  $w_{E2} = 0,376$  (wyznaczone na podstawie znanych formuł, np. Malczewski, Rinner, 2015 str. 40-41, wzory 2.12-2.14). Dla metody opartej na lokalizacjach referencyjnych przyjęto arbitralnie początkowe wagi globalne  $w_1 = w_2 = 0,5$ , co przy liczbie alternatyw  $m = 16$  dla obydwu kryteriów, dało wagę całkowitą  $WC_1 = WC_2 = 8$  (wzór 7). Wagi lokalne w tej metodzie zgodnie ze wzorem (10) przyjmują wartości zestawione na rysunku 3.

0,338	0,451	0,676	1,352	0,338	0,338	0,338	0,338
0,338	0,451	0,676	0,676	0,338	0,451	0,451	0,451
0,338	0,451	0,451	0,451	0,338	0,451	0,676	0,676
0,338	0,338	0,338	0,338	0,338	0,451	0,676	1,352

**Rysunek 3.**

Wyznaczone wartości lokalnych wag  $w_{ij}$  metodą lokalizacji referencyjnych

Wartości wag lokalnych  $w_{ij}$  dla obydwu kryteriów sumują się do wartości wag całkowitych  $WC_1 = WC_2 = 8$ . Jednak wartości tak wyznaczonych wag lokalnych mogą być większe niż jeden. Również wagi wyznaczone w obydwu kryteriach dla tej samej alternatywy (komórki rastra) nie sumują się do jedności (patrz rysunek 3). Do dalszej analizy wyznaczone wagi lokalne (rysunek 3) zostały znormalizowane (wzór 12), wyniki zestawiono w tabeli 1 w kolumnie „metoda lokalizacji referencyjnych z normalizacją wag”. Na przykład dla lokalizacji  $A_{ij} = 2$  (patrz schemat w tabeli 1), wartości wag na rysunku 3 wynosiły odpowiednio:  $w_1 = 0,451$  dla kryterium  $K_1$  oraz  $w_2 = 0,338$  dla kryterium  $K_2$ . Suma wag wynosiła 0,789 i była różna od jedności. Nowe, znormalizowane wartości obliczane są zgodnie z wzorem 12, jako:  $w^*_1 = 0,451/0,789 = 0,570$  oraz  $w^*_2 = 0,338/0,789 = 0,430$ .

### Interpretacja wyników

Wyznaczono lokalne wagi kryteriów trzema opisanymi wcześniej metodami. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 1. Tabela ta zawiera również schemat numeracji lokalizacji  $A_{ij}$  oraz numerację sąsiedztw  $q$  zgodną z rysunkiem 1.

Największa różnica wag między metodą lokalnych zakresów a lokalnych współczynników entropii występuje w bloku 3. Większą rozpiętość wartości kryterium  $K_1$  skutkowałą wyższą wagą dla tego kryterium, wyznaczoną metodą lokalnych zakresów wartości. Natomiast niższe wartości kryterium  $K_2$ , pomimo podobnej struktury, zaowocowały zdecydowanie wyższą wagą dla tego kryterium, wyznaczoną w oparciu o lokalne współczynniki entropii.

Na wagi wyznaczone metodą lokalizacji referencyjnych, co oczywiste, wpływ ma położenie obiektów referencyjnych. Natomiast na wagi lokalne, wyznaczone metodą lokalnych zakresów wartości i lokalnych współczynników entropii, mają wpływ wartości atrybutów kryteriów w danym sąsiedztwie oraz sposób określenia sąsiedztw. Na wagi wyznaczone pierwszą z tych metod wpływ ma tylko minimalna i maksymalna wartość atrybutu w danym sąsiedztwie, natomiast w drugiej metodzie wpływ mają wszystkie wartości atrybutów z danego sąsiedztwa. W metodzie opartej na lokalnych współczynnikach entropii, z założenia,

**Tabela.** Zestawienie lokalnych wag wyznaczonych wybranymi metodami

q	A <sub>ij</sub>	Metoda lokalnych zakresów wartości		Metoda lokalnych współczynników entropii		Metoda lokalizacji referencyjnych z normalizacją wag		Schemat numeracji A <sub>ij</sub>																
		W <sup>q</sup> <sub>1</sub>	W <sup>q</sup> <sub>2</sub>	W <sup>q</sup> <sub>E<sub>1</sub></sub>	W <sup>q</sup> <sub>E<sub>2</sub></sub>	W <sup>r</sup> <sub>i<sub>1</sub></sub>	W <sup>r</sup> <sub>i<sub>2</sub></sub>																	
1	1	0,500	0,500	0,464	0,536	0,500	0,500	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1					2	3		4															
	5					6	7		8															
	9					10	11		12															
13	14	15	16																					
2	0,570	0,430																						
5	0,500	0,500																						
6	0,500	0,500																						
2	3	0,500	0,500	0,453	0,547	0,670	0,330																	
	4					0,800	0,200																	
	7					0,600	0,400																	
	8					0,600	0,400																	
3	9	0,667	0,333	0,280	0,720	0,500	0,500																	
	10					0,500	0,500																	
	13					0,500	0,500																	
	14					0,430	0,570																	
4	11	0,889	0,111	0,984	0,016	0,400	0,600																	
	12					0,400	0,600																	
	15					0,330	0,670																	
	16					0,200	0,800																	

im wyższa nośność informacyjna atrybutów jednego kryterium w porównaniu do drugiego kryterium, tym odpowiednio wyższa waga. Jeżeli w danym sąsiedztwie wystąpią te same wartości atrybutów wówczas  $b = 0$  i waga również będzie równa 0. W metodzie tej wagi zależą również od wysokości wartości atrybutów. Jeżeli atrybuty kryteriów mają taką samą nośność informacyjną, preferowane są bardziej te kryteria, dla których wysokie wartości atrybutów występują na tle dużej liczby niskich wartości niż odwrotnie. Wynika to ze sposobu obliczania współczynnika entropii, w którym sumowane są wartości  $p^q_{ij} \ln(p^q_{ij})$  (wzór (5)). Ponieważ  $p^q_{ij} \in \{0,1\}$ , to  $p^q_{ij} \ln p^q_{ij} \in \{-1/e, 0\}$ . Wyrażenie  $p^q_{ij} \ln(p^q_{ij})$  osiąga minimum dla  $p^q_{ij} = 1/e$ . Ponieważ  $p^q_{ij} = \frac{a^q_{ij}}{\sum_{i \in q} a^q_{ij}}$ , zatem minimalna wartość wyrażenia  $p^q_{ij} \ln(p^q_{ij})$  osiągana jest gdy:  $a^q_{ij} = \frac{\sum_{i \in q} a^q_{ij}}{e}$ . Wartość  $p^q_{ij} \ln(p^q_{ij})$  osiąga wartość maksymalną równą 0 dla  $p^q_{ij} = 1$  oraz dla  $p^q_{ij} = 0$  (ponieważ stosując regułę de l'Hospitala granica:

$$\lim_{p^q_{ij} \rightarrow 0} p^q_{ij} \ln(p^q_{ij}) = 0).$$

Wartość  $p^q_{ij} = 1$  gdy  $a^q_{ij} = \sum_{i \in q} a^q_{ij}$  – jest to możliwe tylko w takim przypadku, w którym tylko jedna wartość atrybutu w sąsiedztwie jest różna od 0. Wartość  $p^q_{ij} = 0$  gdy  $a^q_{ij} = 0$ . W pozostałych przypadkach, wartości  $p^q_{ij}$  będą tym bliższe zero, im mniejsza będzie wartość  $a^q_{ij}$  i większa wartość  $\sum_{i \in q} a^q_{ij}$ . Ponieważ wartości  $p^q_{ij} \ln(p^q_{ij})$  są sumowane, zatem najbliższa zeru wartość entropii zostanie wyznaczona, gdy w danym sąsiedztwie będzie występowało dużo niskich wartości atrybutów oraz kilka zdecydowanie wyższych (gwarantujących wysoką wartość sumy wartości atrybutów w sąsiedztwie).

**Wynikowe wartości alternatyw**

Wartości atrybutów  $a_{ij}$  dla obydwu kryteriów (tj.  $K_1, K_2$ ) zostały znormalizowane za pomocą transformacji liniowej, przy założeniu maksymalizacji funkcji wartości:

$$v(a_{ij}) = \frac{a_{ij} - \min_i(a_{ij})}{\max_i(a_{ij}) - \min_i(a_{ij})}$$
 dla  $i = 1, 2, \dots, 16$  oraz  $j = 1, 2$ . Następnie wyznaczono wyni-

kowe wartości dla alternatyw  $A_i$ , przyjmując liniową, addytywną postać funkcji wartości (wzór (1)). Otrzymano różne wyniki w zależności od przyjętego zestawu wag, wyznaczonych różnymi metodami (rysunek 4). Przyjęto następujące oznaczenia: V1 – wyniki uzyskane dla wag globalnych wyznaczonych na podstawie globalnych zakresów wartości, V2 – dla wag lokalnych, opartych na lokalnych zakresach wartości wyznaczonych w czterech blokach, V3 – dla wag globalnych wyznaczonych w oparciu o globalne współczynniki entropii, V4 – dla wag lokalnych wyznaczonych w oparciu o lokalne współczynniki entropii, V5 – dla wag przestrzennych wyznaczonych metodą lokalizacji referencyjnych z normalizacją wag.

V1				V2				V3			
0,125	0,188	1,000	0,438	0,125	0,188	1,000	0,438	0,094	0,172	1,000	0,329
0,063	0,188	0,125	0,500	0,063	0,188	0,125	0,500	0,078	0,203	0,156	0,593
0,750	0,688	0,313	0,688	0,833	0,750	0,167	0,931	0,812	0,734	0,266	0,765
0,625	0,688	0,625	0,250	0,708	0,708	0,722	0,056	0,687	0,703	0,656	0,188
V4				V5							
0,134	0,192	1,000	0,479	0,125	0,179	1,000	0,175				
0,058	0,183	0,113	0,465	0,063	0,188	0,150	0,575				
0,640	0,605	0,131	0,990	0,750	0,688	0,350	0,625				
0,515	0,660	0,746	0,008	0,625	0,679	0,583	0,400				

**Rysunek 4.** Wynikowe wartości alternatyw wyznaczone dla wyznaczonych różnymi metodami wag istotności kryteriów – wyjaśnienia w tekście (źródło: opracowanie własne)

## Podsumowanie i wnioski

Na wyniki analizy wielokryterialnej może mieć wpływ dobór metody wyznaczania wag istotności kryteriów. Dlatego może być on traktowany jako jeden z aspektów analizy czułości. W artykule opisano trzy metody wyznaczania wag lokalnych: metodę opartą na lokalnych zakresach wartości, lokalnych współczynnikach entropii oraz lokalizacjach referencyjnych. Przeprowadzono prosty eksperyment obliczeniowy dla specjalnie dobranych, hipotetycznych wartości atrybutów dwóch kryteriów, podzielonych na cztery bloki wyznaczające sąsiedztwa oraz dla pojedynczych lokalizacji referencyjnych. Wagi wyznaczone w oparciu o zakresy wartości mogą być traktowane jako wagi normatywne dla metod analizy zgodnych z teorią użyteczności. Wyznaczone wagi zależą od lokalnego zakresu wartości i nie są zależne bezpośrednio od wartości atrybutów. Wagi wyznaczone w oparciu o lokalne współczynniki entropii są zależne bezpośrednio od wartości atrybutów, przy czym, przy podobnej strukturze wartości promowane są układy o większej liczbie niskich wartości atrybutów. Najwyższe wagi wyznaczone w oparciu o współczynnik entropii są osiągnane, gdy w małej liczbie



alternatyw występują wysokie wartości, natomiast w dużej liczbie alternatyw niskie wartości. Przy pewnych układach wartości atrybutów może to doprowadzić do zupełnie przeciwnie wyznaczonych wag istotności za pomocą dwóch metod (patrz blok 3) i wpłynąć na wynikowe wartości w alternatywach, a w konsekwencji na podejmowane decyzje. Istotna jest zatem znajomość interpretacji i wpływu poszczególnych metod na otrzymane wyniki oraz świadome dokonywanie wyboru metody.

### Literatura (References)

- Chen Y., Yu J., Shahbaz K., Xevi E., 2009: A GIS-Based Sensitivity Analysis of Multi-Criteria Weights. 18th World IMACS/MODSIM Congress, Cairns, Australia 13-17 July 2009: 3137-3143  
<http://mssanz.org.au/modsim09>
- Choo E.U., Schoner B., Wedley W.C., 1999: Interpretation of criteria weights in multicriteria decision making. *Computers & Industrial Engineering* 37: 527- 541.
- Feick R., Hall B., 2004: A method for examining the spatial dimension of multi-criteria weight sensitivity. *International Journal of Geographical Information Science* 18(8): 815-840, DOI: 10.1080/13658810412331280185.
- Fischer G.W., 1995: Range sensitivity of attribute weights in multiattribute value models. *Organizational Behavior and Human Decision Processes* 62(3): 252-266.
- Keeney R.L., 1992: Value-focused thinking: A path to creative decision making. Cambridge: Harvard University Press.
- Kao Ch., 2010: Weight determination for consistently ranking alternatives in multiple criteria decision analysis. *Applied Mathematical Modeling* 34: 1779-1787.
- Kobryń A., Tarnacka K., 2015: Problem wyboru optymalnej funkcji fragmentu centrum Białegostoku (The problem with optimal function selection for a fragment of the centre of Białystok). *Problemy Rozwoju Miast, Kwartalnik Naukowy Instytutu Rozwoju Miast* r. XII, z. I: 15-20.
- Kumar M., Pravesh R., Tripathi D.K., 2015: Comparison of Weighting Assessment Techniques and its Integration with GIS-Based Multicriteria Decision Making. *Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.* 85(1): 197-209, DOI 10.1007/s40010-014-0186-9.
- Lai S.-K., Hopkins L.D., 1989: The meanings of trade-offs in multiattribute evaluation methods: a comparison. *Environment and Planning B: Planning and Design* vol. 16: 155-170.
- Ligmann-Zielińska A., Jankowski P., 2012: Impact of proximity-adjusted preferences on rank-order stability in geographical multicriteria decision analysis. *Journal of Geographical Systems* 14(2): 167-187.
- Ligmann-Zielińska A., Jankowski P., 2008: A framework for sensitivity analysis in spatial multiple criteria evaluation. [In:] Cova T.J., Miller H.J., Beard K., Frank A.U., Goodchild M.F. (eds.), *Geographic Information Science*. Volume 5266 of the series Lecture Notes in Computer Science: 217–233, Berlin, Heidelberg: Springer.
- Malczewski J., 1999: GIS and multicriteria decision analysis. John Wiley & Sons, Inc. Canada.
- Malczewski J., 2011: Local weighted linear combination. *Transactions in GIS* 15(4): 439-455.
- Malczewski J., Rinner C., 2015: Multicriteria Decision Analysis in Geographic Information Science. Springer, ISSN 1867-2434, DOI 10.1007/978-3-540-74757-4.
- Nijkamp P., van Delft A., 1977: Multicriteria analysis and regional decision-making. Leiden: Martinus Nijhoff.
- Şalap-Ayça S., Jankowski P., 2016: Integrating local multicriteria evaluation with spatially explicit uncertainty-sensitivity analysis. *Spatial Cognition & Computation* 16(2): 106-132, DOI: 10.1080/13875868.2015.1137578.
- Saltelli A., Tarantola S., Chan K., 1999: A Role for Sensitivity Analysis in Presenting the Results from MCDA Studies to Decision Makers. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 8: 139-145.
- Shannon C.E., Weaver W., 1947: The mathematical theory of communication. Urbana: The University of Illinois Press.
- Triantaphyllou E., 1997: A Sensitivity Analysis Approach for Some Deterministic Multi-Criteria Decision-Making Methods. *Decision Sciences* vol. 28, no. 1: 151-194, USA.
- Von Nitzsch R., Weber M., 1993: The Effect of Attribute Ranges on Weights in Multiattribute Utility Measurements. *Management Science* vol. 39(8): 937-943, p-ISSN: 0025-1909, e-ISSN: 1526-5501, DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.39.8.937>.

Xian C.Z., Ku Y.H., Yeol C.J., Yong Y.H., 2011: Multi-criteria group decision making with fuzzy logic and entropy based weighting. Proceedings of the 5th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication, ICUIMC 2011.

### **Streszczenie**

*W metodach przestrzennej analizy wielokryterialnej istnieje możliwość zróżnicowania przestrzennego wag kryteriów. Dobór metody wyznaczania lokalnych wag wpływa na uzyskiwane wyniki analizy. Wybór metody może zatem stanowić jeden z aspektów analizy czułości.*

*W artykule, na podstawie literatury, omówiono opracowane w ostatnich latach metody wyznaczania przestrzennych wag istotności związane z: lokalnymi zakresami wartości, lokalnymi współczynnikami entropii oraz lokalizacjami referencyjnymi. Następnie, na podstawie opracowanego hipotetycznego przykładu, zilustrowano zasadę wyznaczania wag lokalnych wspomnianymi metodami. Pozwoliło to na stwierdzenie, że w przypadku metody związanej z lokalizacjami referencyjnymi, w celu spełnienia założeń dotyczących wag kryteriów wynikających z teorii użyteczności, konieczne jest dokonanie dodatkowo normalizacji wyznaczonych wag lokalnych. Normalizacja wag w tej metodzie prowadzi do odmiennej ich interpretacji. Dokonano również porównania otrzymanych wag lokalnych oraz wyników wartości alternatyw w zależności od doboru metody wyznaczania wag kryteriów. Omówione metody są niezależne od preferencji decydenta odnośnie istotności poszczególnych kryteriów. W przypadku metody opartej na lokalnych zakresach wartości i lokalnych współczynnikach entropii wyznaczone wagi zależą od wartości atrybutów poszczególnych kryteriów w przyjętych sąsiedztwach. Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdzono, że szczególnie czule na wartości atrybutów są wagi wyznaczone metodą lokalnych współczynników entropii. Otrzymane wyniki mogą być pomocne przy podejmowaniu decyzji odnośnie doboru metody wyznaczania wag lokalnych.*

### **Abstract**

*Methods of spatial multi-criteria analysis allow for spatial differentiation of weights of criteria. The selection of the method of determination of local weights affects the obtained analysis results. Therefore, the selection of this method may be one of the aspects of the sensitivity analysis.*

*Based on the literature, the paper discusses recently developed methods of determination of spatial significance weights, related to local ranges of values, with local entropy coefficients and with locations references. Then, the principle of determination of local weights by means of the said methods was illustrated based on a developed hypothetical example. This showed that - in the case of the method related to locations reference - meeting assumptions concerning weights of criteria resulting from the utility theory requires the additional performance of normalisation of the determined local weights. Normalisation of weights in the methods leads to their different interpretation. The obtained local weights were also compared with the resulting values of alternatives depending on the selection of the method of determination of weights of criteria. The discussed methods are independent from the preferences of the decision-maker regarding the significance of particular criteria. In the case of the method based on local ranges of values and local entropy coefficients, the determined weights depend on values of attributes of particular criteria in adopted neighbourhoods. Based on the conducted analysis it was shown that weights determined by means of the method of local coefficients of entropy are particularly sensitive to attributes values. The obtained results can be helpful in making decisions regarding the selection of the method of determination of local weights.*

Dane autora / Author details:

dr inż. Joanna Jaroszewicz  
<https://orcid.org/0000-0002-6112-5240>  
[j.jaroszewicz@gik.pw.edu.pl](mailto:j.jaroszewicz@gik.pw.edu.pl)

Przesłano / Received 12.07.2016  
Zaakceptowano / Accepted 20.09.2016  
Opublikowano / Published 30.03.2017