

## Optymalizacja odwzorowania wielostozkowego Polski według kryterium Airy'ego

Optimization of a polyconic projection for Poland  
with respect to Airy's criterion

Kamil Jan Latuszek

Politechnika Warszawska, Wydział Geodezji i Kartografii, Zakład Kartografii

**Słowa kluczowe:** kartografia matematyczna, odwzorowania wielostozkowe, minimalizacja zniekształceń odwzorowawczych, kryterium Airy'ego, algorytm Nelder-Meada  
**Keywords:** mathematical cartography, polyconic projections, minimization of projection distortion, Airy's criterion, Nelder-Mead algorithm

### Wstęp

W artykule rozważone zostanie odwzorowanie pośrednie pomiędzy odwzorowaniami równopoleowymi a równokątnymi. Odwzorowanie to będzie minimalizować przeciętne zniekształcenia odległości we wszystkich kierunkach, dla całego odwzorowywanego obszaru. Obszar ten będzie prostokątnym płatem elipsoidy obrotowej spłaszczonej odpowiadającym w przybliżeniu obszarowi Polski:

$$\omega = \{(\varphi, \lambda) : \varphi \in \langle 49^{\circ}00', 54^{\circ}50' \rangle, \lambda \in \langle 14^{\circ}07', 24^{\circ}08' \rangle\} \quad (1)$$

Jedną z podstawowych miar lokalnych zniekształceń odwzorowawczych (miar zależnych jedynie od współrzędnych geodezyjnych  $(\varphi, \lambda)$  rozważanego punktu odwzorowania) jest tzw. miara średniokwadratowa pierwszego rodzaju w sensie G.B. Airy'ego:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{2}[(m-1)^2 + (n-1)^2]} \quad (2)$$

W powyższym równaniu  $m, n$  oznaczają ekstremalne skale długości. Miary lokalne zniekształceń stanowią często podstawę do definiowania miar integralnych, charakteryzujących stan rozkładu zniekształceń w całym dowolnie wyróżnionym obszarze (w artykule będzie to obszar  $\omega$ ). Miara lokalna (2) może zostać uogólniona do miary integralnej (3), zwanej całkowitym średniokwadratowym zniekształceniem pierwszego rodzaju dla danego obszaru w sensie Airy'ego:

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{2|S|} \int_{\partial S} [(m-1)^2 + (n-1)^2] dS} \quad (3)$$

W powyższym równaniu  $S$  oznacza obszar badania stanu rozkładu zniekształceń odwzorowawczych,  $|S|$  oznacza miarę obszaru,  $\partial S$  oznacza jego granice,  $dS$  oznacza element pola powierzchni oryginału (elipsoidy obrotowej spłaszczonej). W oparciu o miarę (3) można sformułować kryterium globalne minimalizacji zniekształceń, postulujące minimalizację wskazanej miary dla wybranego obszaru:

$$\min E_1 = \sqrt{\frac{1}{2|S|} \int_{\partial S} [(m-1)^2 + (n-1)^2] dS} \quad (4)$$

Kryterium całkowite (4) nazywane jest kryterium Airy'ego (Panasiuk, Balcerzak, Pokrowska, 1999; Pędzich, 2008).

Ekstremalne skale długości  $m$ ,  $n$  w poszczególnych punktach odwzorowania są równe półosiom elips zniekształceń odwzorowawczych i wyznaczają zniekształcenia kątów, powierzchni pól oraz przeciętne zniekształcenia długości we wszystkich kierunkach. Regularne odwzorowanie powierzchni w inną powierzchnię, o skalach ekstremalnych wszędzie równych jedności (elipsach zniekształceń wszędzie równych okręgom jednostkowym) nie posiada zniekształceń, dlatego minimalizacja miary integralnej (3) pozwala na jednoczesną minimalizację wszystkich wspomnianych rodzajów zniekształceń. Wobec tego odwzorowanie spełniające kryterium (4) ma charakter pośredni pomiędzy optymalnymi odwzorowaniami równokątnymi a równopolowymi.

Najprawdopodobniej około 1820 roku F.R. Hassler wynalazł odwzorowanie kartograficzne (5), w którym obrazy równoleżników były łukami okręgów (niekoncentrycznych), a południki fragmentami linii krzywych. Odwzorowanie to nie było ani równokątne, ani równopolowe, zachowywało natomiast skalę długości wzdłuż równoleżników. Hassler nazwał to odwzorowanie wielostożkowym.

$$\begin{aligned} x(\varphi = 0, \lambda) &= -M_0 \\ y(\varphi = 0, \lambda) &= a(\lambda - \lambda_0) \\ x(\varphi \neq 0, \lambda) &= M - M_0 + N \cot \varphi (1 - \cos E) \\ y(\varphi \neq 0, \lambda) &= N \cot \varphi \sin E \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E &= (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \\ M &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt[3]{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Odwzorowanie wielostożkowe (w Europie nazywane wielostożkowym amerykańskim) stosowane było później w Stanach Zjednoczonych, w nieco zmodyfikowanej formie do wykonywania map wielkoskalowych (do połowy XX wieku). Obrazy równoleżników mają taką samą krzywiznę oraz długość, jaką miałyby, gdyby zostały odwzorowane za pomocą odwzorowania stożkowego styczego do nich, stąd „wielość” stożków i nazwa odwzorowania. Przez uogólnienie nazwa odwzorowania wielostożkowego jest również często używana do określenia innych odwzorowań kartograficznych o obrazach równoleżników będących łukami okręgów (Snyder, 1987).

W dalszej części artykułu rozważone zostaną trzy modele parametryczne odwzorowań wielostozkowych dla obszaru Polski, których ogólny zapis formuł odwzorowawczych jest następujący:

$$\begin{aligned} x(\varphi, \lambda) &= q(\varphi) - \rho(\varphi) \cos[c(\varphi)(\lambda - \lambda_0)] \\ y(\varphi, \lambda) &= \rho(\varphi) \sin[c(\varphi)(\lambda - \lambda_0)] \\ \lambda_0 &= 19^\circ 07' 30'' \end{aligned} \quad (6)$$

### Sformułowanie zadania optymalizacji odwzorowania wielostozkowego

Przez zastosowanie I twierdzenia Apolloniusza oraz wykonanie przekształceń kryterium (4) staje się równoważne minimalizacji całki (7), wyrażonej za pomocą współczynników pierwszych form kwadratowych powierzchni obrazu oraz powierzchni oryginału:  $(E', F', G', E, F, G)$ :

$$\begin{aligned} E_1' &= \iint_{\Delta\theta, \Delta\lambda} \left[ E' \sqrt{\frac{G}{E}} + G' \sqrt{\frac{E}{G}} - 2\sqrt{E'G + EG' + 2\sqrt{EG(E'G' - F'^2)}} \right] d\theta d\lambda \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Dla odwzorowań wielostozkowych (6) współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni obrazu wyrażają się zależnościami (8).

$$\begin{aligned} E' &= q'^2 + \rho'^2 + \rho'^2 (c'(\lambda - \lambda_0))^2 - 2q'\rho' \cos(c(\lambda - \lambda_0)) + 2q'\rho' c'(\lambda - \lambda_0) \sin(c(\lambda - \lambda_0)) \\ G' &= \rho'^2 c^2 \\ F' &= q'\rho' c \sin(c(\lambda - \lambda_0)) + \rho'^2 c(c'(\lambda - \lambda_0)) \end{aligned} \quad (8)$$

Jeżeli zdefiniowane zostaną zmienne decyzyjne (parametry określające jednoznacznie odwzorowanie wielostozkowe) pozwalające na obliczenie funkcji (8), to możliwe stanie się rozważenie następującego zadania optymalizacji, gdzie funkcją celu jest podany w (7) odpowiednik miary (3):

$$\min E_1'(\vec{p}) = \iint_{\Delta\theta, \Delta\lambda} \left[ E' \sqrt{\frac{G}{E}} + G' \sqrt{\frac{E}{G}} - 2\sqrt{E'G + EG' + 2\sqrt{EG(E'G' - F'^2)}} \right] d\theta d\lambda \quad (9.1)$$

$$p.o. \quad \vec{p} \in P \subseteq R^n$$

$$\vec{p} \in P \Leftrightarrow \left\{ \bigvee_{\varphi} \bigvee_{\lambda} [\rho' c'(\lambda - \lambda_0) (q' \cos(c(\lambda - \lambda_0)) - \rho')] \neq 0 \wedge c(\lambda_{\max} - \lambda_0) < \pi \right\} \quad (9.2)$$

Podane ograniczenia (9.2) wyrażają konieczność zapewnienia różnowartościowości odwzorowania, w tym regularności (określenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych). Funkcje  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$  można zastąpić wielomianami potęgowymi (10) i sparametryzować współczynniki tych wielomianów, uzyskując w ten sposób pewien model parametryczny odwzorowania wielostozkowego (6). Czynniki stały  $q$  dla jest pominięty, gdyż wpływałby on jedynie na przesunięcie współrzędnych odwzorowania.

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= q_1\theta + q_2\theta^2 + q_3\theta^3 + \dots \\
\rho(\theta) &= \rho_0 + \rho_1\theta + \rho_2\theta^2 + \dots \\
c(\theta) &= c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\vec{p} = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_n] = [q_1, q_2, q_3, \dots, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots]$$

W ten sposób zdefiniować można zmienne decyzyjne zadania optymalizacji i umożliwić jego rozwiązanie metodami numerycznymi. Zastępując przy tym szerokość geodezyjną jej dopełnieniem do kąta prostego  $\theta$  otrzymamy przykładowy model postaci:

$$\begin{aligned}
x(\varphi, \lambda) &= q(\theta) - \rho(\theta) \cos[c(\theta)(\lambda - \lambda_0)] \\
y(\varphi, \lambda) &= \rho(\theta) \sin[c(\theta)(\lambda - \lambda_0)]
\end{aligned} \tag{11.1.1}$$

Wartości parametrów wektora  $\vec{p}$  można za pośrednictwem współczynników pierwszej formy kwadratowej powierzchni obrazu (8) podstawić do całki (7) i dalej przez obliczenie (3) umożliwić ocenienie ogólnego poziomu zniekształceń odwzorowania wieloścokowego. Ograniczenia zadania optymalizacji dla wybranego modelu wyrażą się wówczas jako następujące zależności:

$$\forall_{\varphi} \rho > 0 \wedge \forall_{\varphi} c > 0 \wedge \forall_{\varphi} \left( \frac{\rho'}{q'} \notin \langle \cos[c(\lambda_{\max} - \lambda_0)]; 1 \rangle \right) \wedge \forall_{\varphi} c(\lambda_{\max} - \lambda_0) < \pi \tag{11.1.2}$$

Ograniczeniom tym nie odpowiada wprost skończony zbiór ograniczeń funkcyjnych nierównościowych, jednakże dla wskazanego obszaru optymalizacji odwzorowania uzyskiwane drogą rozwiązywania zadania bez ograniczeń (z pominięciem ich) okazywały się być regularne, co sprawdzano *a posteriori*. Przykład badania regularności odwzorowania podany zostanie w dalszej części artykułu.

Możliwe jest zdefiniowanie innych modeli parametrycznych odwzorowania wieloścokowego (6), przykładowo poprzez zmianę wzajemnych relacji poszczególnych funkcji wewnętrznych  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$ . Motywacją dla zastosowania parametryzacji (11.2.1-11.2.2) jest doprowadzenie do sytuacji, w której poszczególne funkcje  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$  decydują niezależnie o rozmieszczeniu, promieniu oraz długości łuków obrazów równoleżników. Według (11.2.1) funkcja  $q$  decyduje o rozmieszczeniu obrazów równoleżników wzdłuż obrazu południka osiowego, funkcja  $\rho$  decyduje o długości promienia obrazu równoleżnika (tutaj bez zmian w stosunku do poprzedniej parametryzacji), natomiast funkcja  $c$  samodzielnie decyduje o długości obrazu równoleżnika:

$$\begin{aligned}
x(\varphi, \lambda) &= q(\theta) + \rho(\theta) - \rho(\theta) \cos \left[ \frac{c(\theta)}{\rho(\theta)} (\lambda - \lambda_0) \right] \\
y(\varphi, \lambda) &= \rho(\theta) \sin \left[ \frac{c(\theta)}{\rho(\theta)} (\lambda - \lambda_0) \right]
\end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Ograniczenia dla tego modelu wyrażać się będą zależnościami:

$$\forall_{\varphi} \rho > 0 \wedge \forall_{\varphi} \frac{c}{\rho} > 0 \wedge \forall_{\varphi} \left( \frac{\rho'}{q'} < \frac{\cos \left[ \frac{c}{\rho} (\lambda_{\max} - \lambda_0) \right]}{1 - \cos \left[ \frac{c}{\rho} (\lambda_{\max} - \lambda_0) \right]} \right) \wedge \forall_{\varphi} \frac{c}{\rho} (\lambda_{\max} - \lambda_0) < \pi \quad (11.2.2)$$

Zaproponowany zostanie jeszcze trzeci model parametryczny (11.3.1-11.3.2), w którym funkcja  $\rho$  decyduje o długości obrazu równoleżnika, natomiast o jego krzywiznie decyduje funkcja  $\rho$  oraz  $c$ :

$$x(\varphi, \lambda) = q(\theta) + \frac{\rho(\theta)}{c(\theta)} - \frac{\rho(\theta)}{c(\theta)} \cos[c(\theta)(\lambda - \lambda_0)] \quad (11.3.1)$$

$$y(\varphi, \lambda) = \frac{\rho(\theta)}{c(\theta)} \sin[c(\theta)(\lambda - \lambda_0)]$$

*p.o.*

$$\forall_{\varphi} \frac{\rho}{c} > 0 \wedge \forall_{\varphi} c > 0 \wedge \forall_{\varphi} \left( \frac{\rho' c - \rho c'}{q' c^2} < \frac{\cos[c(\lambda_{\max} - \lambda_0)]}{1 - \cos[c(\lambda_{\max} - \lambda_0)]} \right) \wedge \forall_{\varphi} c(\lambda_{\max} - \lambda_0) < \pi \quad (11.3.2)$$

Sposób parametryzacji poszczególnych funkcji  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$  (parametryzacja współczynników rozwinięć w szeregi potęgowe) jest dla wszystkich modeli taki sam i został podany w (10).

Nie istnieje model parametryczny umożliwiający reprezentację każdego możliwego odwzorowania wielostozkowego podanego w formie analitycznej (6), w szczególności biorąc pod uwagę praktyczną konieczność ograniczenia liczby wykorzystywanych parametrów. Możliwe jest natomiast porównanie różnych modeli parametrycznych pod względem ich efektywności, rozumianej jako możliwość ich optymalizacji, celem rozwiązania zadania (9.1-9.2).

## Optymalizacja odwzorowania wielostozkowego

Omawiane modele parametryczne wskazują pewne wieloparametrowe rodziny odwzorowań wielostozkowych, do których należą odwzorowania stożkowe normalne:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\rho(\theta) \cos[c_0(\lambda - \lambda_0)] \\ y = \rho(\theta) \sin[c_0(\lambda - \lambda_0)] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho(\theta) - \rho(\theta) - \rho(\theta) \cos \left[ \frac{c_0 \rho(\theta)}{\rho(\theta)} (\lambda - \lambda_0) \right] \\ y = \rho(\theta) \sin \left[ \frac{c_0 \rho(\theta)}{\rho(\theta)} (\lambda - \lambda_0) \right] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho(\theta) - \frac{c_0 \rho(\theta)}{c_0} - \frac{c_0 \rho(\theta)}{c_0} \cos[c_0(\lambda - \lambda_0)] \\ y = \frac{c_0 \rho(\theta)}{c_0} \sin[c_0(\lambda - \lambda_0)] \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\vec{p} = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_n] = [q_1, q_2, q_3, \dots, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots]$$

$$\vec{p}_1 = [0, 0, 0, \dots, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, c_0, 0, 0, \dots]$$

$$\vec{p}_2 = [\rho_1, \rho_2, 0, \dots, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, c_0 \rho_0, c_0 \rho_1, c_0 \rho_2, \dots]$$

$$\vec{p}_3 = [\rho_1, \rho_2, 0, \dots, c_0 \rho_0, c_0 \rho_1, c_0 \rho_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots]$$

Według (12)  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  oznaczają równoważne wektory zmiennych decyzyjnych (wskazujące to samo odwzorowanie stożkowe) wedle modeli parametrycznych (11.1, 11.2, 11.3). Wskazane modele parametryczne, przy zastosowaniu takiej samej liczby parametrów, reprezentują rodziny odwzorowań wielostożkowych o częściowym pokryciu, ponieważ istnieją zarówno odwzorowania wielostożkowe należące do wszystkich trzech rodzin, jak i odwzorowania należące tylko do niektórych z nich. Gdyby nawet optymalne odwzorowanie dla wszystkich trzech rodzin było tym samym odwzorowaniem, nie dawałoby to pewności, że porównywane modele są równie efektywne (przy zadanym, wspólnym odwzorowaniu początkowym i dla danego algorytmu optymalizacji). Inaczej mówiąc, nawet rozważając podzbiory wspólne odwzorowań wielostożkowych, należące do wszystkich trzech rodzin, przeszreń przeszukiwań może prezentować różny stopień trudności, wpływając na zbieżność danego algorytmu.

W artykule podjęta zostanie próba porównania efektywności wybranych modeli przy następujących założeniach:

- odwzorowaniem początkowym będzie pewne odwzorowanie stożkowe wyrażalne w obrębie wszystkich trzech modeli parametrycznych (opisane w dalszej części artykułu),
- wykorzystany zostanie algorytm optymalizacji lokalnej nieliniowej Nelder-Meada wsparty operatorem mutacji rozkładem normalnym,
- ponieważ algorytm optymalizacji zawiera procedury niedeterministyczne – kryterium porównawczym dla wskazanych modeli będzie uśredniona wartość miary integralnej (3) dla kilkudziesięciu odwzorowań (dla każdej parametryzacji), uzyskanych drogą optymalizacji wskazanym algorytmem, gdzie kryterium stopu będzie liczbą wykonanych obliczeń wartości funkcji celu (przyjęto dziesięć tysięcy razy wymiar zadania, co na ogół pozwalało uzyskać odwzorowania o niewielkich zniekształceniach).

Dla odwzorowań stożkowych normalnych równokątnych oraz równopółowych znane jest kryterium Kawrajskiego, pozwalające na minimalizację pozostałych rodzajów zniekształceń dla odwzorowywanego obszaru. Na podstawie trzech kryteriów (Pasaniuk, Balcerzak, Pokrowska, 1999) można wyznaczyć stałe odwzorowania stożkowego  $c$ ,  $C$  oraz długość promienia obrazu równoleżnika  $\rho(\theta)$  odwzorowania stożkowego równokątnego (13.1) oraz równopółowego (13.2) dla obszaru Polski:

$$\begin{aligned} \rho_k(\theta) &= C_k E^{-c_k Q(\theta)}, \\ Q(\theta) &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \cos \theta \left( \frac{1 - e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^e}{1 - \cos \theta \left( \frac{1 - e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right)^e} \right] \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$c_k = 0,787505545365; C_k = 11514291,6465 \text{ m};$$

$$\begin{aligned} \rho_p(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{c_p} (C_p - S(\theta))} \\ S(\theta) &= \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left( \frac{\cos \theta}{1-e^2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{2e} \ln \left| \frac{1+e \cos \theta}{1-e \cos \theta} \right| \right) \end{aligned} \quad (13.2)$$

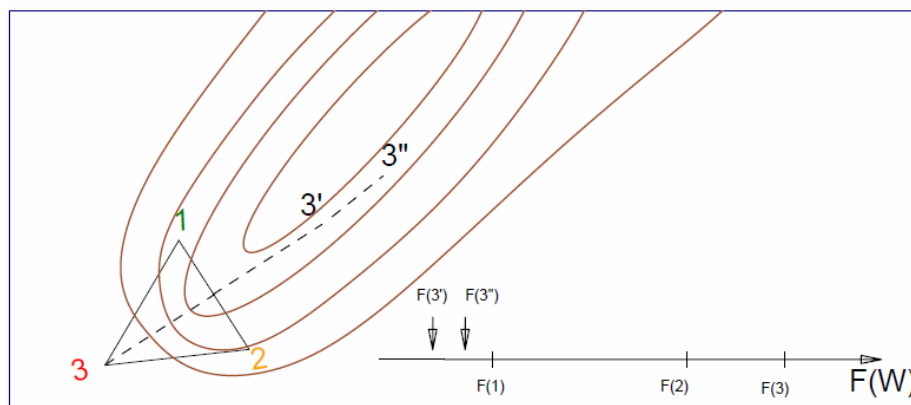
$$c_p = 0,7871665297493; C_p = 41753294703717 \text{ m}^2;$$

W równaniach (13.1-13.2)  $E$ ,  $e$  oznaczają odpowiednio podstawę logarytmu naturalnego oraz pierwszy mimośród elipsoidy obrotowej spłaszczonej. Przykładem odwzorowania stożkowego pośredniego pomiędzy optymalnym dla obszaru Polski odwzorowaniem stożkowym równokątnym a równopolowym może być odwzorowanie stożkowe minimalizujące sumę kwadratów różnic promieni wodzących obrazów równoleżników odwzorowanego (szukanego, pośredniego) z odwzorowaniami (13.1, 13.2) oraz uśredniające wartość stałych stożkowych  $c$ :

$$\min_{\rho} \int_{\hat{\theta}} (\rho(\theta) - \rho_k(\theta))^2 + (\rho(\theta) - \rho_p(\theta))^2 \quad \wedge \quad c = \frac{c_k + c_p}{2} \quad (14)$$

Odwzorowanie takie nie jest już ani równokątne, ani równopolowe, ma natomiast małe zniekształcenia przeciętne długości we wszystkich kierunkach w badanym obszarze (tym samym zminimalizowane równocześnie zniekształcenia kątów i powierzchni pól). Przyjęte ono zostanie, biorąc trzy parametry na opisanie  $\rho(\theta)$  oraz jeden na opisanie  $c(\theta) = c$ , jako odwzorowanie początkowe (definiowalne we wszystkich modelach, według (12)).

Do rozwiązania zadania optymalizacji odwzorowania wielostozkowego wykorzystany został algorytm optymalizacji lokalnej, nieliniowej Neldera-Meada, zmodyfikowany przez dodanie operatora mutacji rozkładem normalnym, znanego z algorytmów ewolucyjnych. Algorytm w niezmodyfikowanej wersji zakłada geometryczne przekształcanie sympleksu, to jest uogólnionego na  $n$  wymiarów trójkąta o  $n+1$  wierzchołkach, z których  $n$  jest liniowo niezależnych, gdzie  $n$  to liczba zmiennych decyzyjnych (parametrów jednoznacznie określających odwzorowanie wielostozkowe na podstawie (10) oraz (11.1.1), (11.2.1) lub (11.3.1)). Każdy wierzchołek leży na pewnej warstwy wartości funkcji celu (3) lub równoważnie, dla uproszczenia obliczeń (7) i może być interpretowany jako odwzorowanie wielostozkowe o ogólnym poziomie zniekształceń określonym przez te funkcje. W każdej iteracji wierzchołek najgorszy (o największej wartości funkcji celu, któremu odpowiada odwzorowanie o największych zniekształceniach) jest przesuwany w kierunku centroidu (środka ciężkości) pozostałych wierzchołków, czyli w domniemanym kierunku poprawy dla tego wierzchołka. Stopień przesunięcia zależy od stopnia poprawy wartości funkcji celu w nowym punkcie, w stosunku do dotychczasowych wierzchołków. Działanie algorytmu ilustrowane jest najczęściej dla przypadku dwuwymiarowego, gdzie sympleks jest trójkątem (rys. 1).



**Rysunek 1.** Sympleks, którego wierzchołkom 1, 2, 3 odpowiadają kolejno rosnące wartości funkcji celu; punkt 3' jest punktem próbnie odbitym; punkt 3'' jest punktem próbnej ekspansji – podobnie jak 3 okaże się on lepszy od 1 i stanie się nowym wierzchołkiem sympleksu w danej iteracji

Wedle załączonej ilustracji można przyjąć, że wierzchołkiem najlepszym jest wierzchołek o numerze 1, najgorszym wierzchołek o numerze 3. Wierzchołek najgorszy, tzn. 3 jest wstępnie odbijany symetrycznie względem centroidu na pozycję 3'. W zależności od stopnia poprawy wartości funkcji celu w punkcie 3' (przez porównanie z wartością funkcji celu w innych wierzchołkach) 3' może zostać uznany za nowy wierzchołek, zastępując wierzchołek 3, lub wykonane może zostać kolejne przesunięcie próbne na pozycję 3''. Przesunięcie dalsze, zwiększające rozmiar sympleksu, zwane ekspansją, wykonane zostanie, jeżeli wierzchołkowi 3' będzie odpowiadać wystarczająco mała wartość funkcji celu. Jeżeli próbny odbity wierzchołek 3' nie będzie wykazywać wystarczającej poprawy wartości funkcji celu zostanie on ściągnięty na pozycję 3'', zmniejszając rozmiar sympleksu (dwa rodzaje ściągnięcia – po stronie przeciwnej lub tej samej do wierzchołka poprawianego). Ostateczna decyzja o wyborze nowej pozycji wierzchołka 3 podejmowana jest w oparciu o wartość funkcji celu w 3''. W skrajnym przypadku dokonywana jest kontrakcja uśredniająca pozycje wierzchołków z wierzchołkiem najlepszym w dotychczasowym sympleksie. Operacje takie jak odbicie i ekspansja zachowują lub zwiększają rozmiar sympleksu i są właściwe dla sytuacji, gdy sympleks jest odległy od poszukiwanego minimum. Operacje ściągnięć oraz kontrakcji wykonywane są przy małym obserwowanym stopniu poprawy wartości funkcji celu i są właściwe dla końcowego etapu optymalizacji, kiedy sympleks zmniejsza rozmiar i zapada się do minimum. Dokładny opis działania algorytmu (wykorzystanego po opisanej dalej modyfikacji na potrzeby niniejszego artykułu) można znaleźć w (Latuszek, 2013).

Rozwiązaniem początkowym metody jest zbiór wektorów reprezentujących rozwiązania startowe ( $n + 1$  wierzchołków sympleksu). Przyjęto, że jednym z wierzchołków jest wspomniane odwzorowanie stożkowe pośrednie, pozostałe są uzyskane przez dodanie do kolejnych parametrów tego odwzorowania liczby 0.01:

$$P_{n+1,n} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1(1) & \bar{p}_1(2) & \dots & \bar{p}_1(n) \\ \bar{p}_1(1) + 0.01 & \bar{p}_1(2) & \dots & \bar{p}_1(n) \\ \bar{p}_1(1) & \bar{p}_1(2) + 0.01 & \dots & \bar{p}_1(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_1(1) & \bar{p}_1(2) & \dots & \bar{p}_1(n) + 0.01 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{p}_1 = [0, 0, 0, \dots, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, c_0, 0, 0, \dots]$$

$$\rho_0 = 0,1183611406507, \rho_1 = 1,009643456502, \rho_2 = -0,00502359408603$$

$$c_0 = 0,787336037557$$

Przytoczony algorytm Nelder-Meada można skutecznie zastosować do optymalizacji odwzorowań azymutalnych normalnych sfery według kryterium Airy'ego (Latuszek, 2013) oraz do optymalizacji współczynników transformacji znanych odwzorowań sfery według kryterium minimalizacji zrewidowanej miary Petersa (Canters, 2002), gdzie celem zapobieżenia przedwczesnej zbieżności połączono ten algorytm z metodą wielostartową. Ponieważ w przypadku optymalizacji według kryterium Airy'ego wybranych modeli parametrycznych odwzorowań wielostożkowych elipsoidy obrotowej spłaszczonej zaobserwowano przedwczesną zbieżność algorytmu, połączono go z operatorem mutacji rozkładem normalnym. Działanie operatora mutacji polega na dodaniu do parametrów odwzorowania liczb wylosowanych z rozkładu normalnego o pewnym ustalonym eksperymentalnie odchyleniu standar-



dowym i zerowej wartości oczekiwanej. Po ustalonej liczbie iteracji metody Neldera-Meada, najlepszy znaleziony w toku dotychczasowego działania algorytmu wierzchołek był mutowany  $n + 1$  razy, celem wygenerowania nowego sympleksu. Nowy sympleks mógł potencjalnie okazać się zbieżny do innego wierzchołka o mniejszej wartości funkcji celu, w którym to przypadku stawał się nowym najlepszym wierzchołkiem i podlegał dalszej mutacji. Eksperymentalnie ustalono liczbę iteracji  $n_{iter}$  metody optymalizacji Neldera-Meada oraz wartość odchylenia standardowego  $\sigma$ , przyjmując za kryterium porównawcze uśredniony wynik optymalizacji podany według znormalizowanej miary (3), dla dziesięciu prób, dla kilku par wartości  $n_{iter}$ ,  $\sigma$ , dla parametryzacji (11.1.1), przyjmując po cztery parametry na określenie funkcji. Przyjęto ostatecznie wariant ( $n_{iter} = 1000$ ,  $\sigma = 0,01$ ; tab. 1).

**Tabela 1.** Zestawienie oraz uśrednienie wyników optymalizacji dla różnych ustawień algorytmu w cm/km

$n_{iter} = 500$			$n_{iter} = 1000$			$n_{iter} = 1500$		
$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,01$	$\sigma = 0,001$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,01$	$\sigma = 0,001$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,01$	$\sigma = 0,001$
20,4	18,7	19,9	18,8	18,7	19,1	20,0	18,7	18,9
20,8	19,0	19,1	19,4	18,7	18,8	19,3	18,7	19,0
19,5	18,9	19,4	19,0	18,7	18,8	20,0	19,0	19,1
18,8	18,7	19,9	19,3	18,7	18,9	18,8	18,7	19,0
21,8	18,8	19,6	19,1	19,0	19,0	19,3	18,7	18,8
20,3	18,7	19,4	19,9	18,7	19,1	18,9	18,7	18,7
21,2	18,7	19,8	19,3	18,8	19,0	18,9	18,8	18,7
19,1	18,7	20,0	18,9	18,7	18,9	18,8	18,7	18,8
19,9	18,7	19,4	18,9	18,7	18,7	19,0	18,8	19,1
19,8	18,7	19,9	18,8	18,8	18,8	18,6	18,8	18,7
<b>20,17</b>	<b>18,753</b>	<b>19,64</b>	<b>19,14</b>	<b>18,745</b>	<b>18,91</b>	<b>19,16</b>	<b>18,762</b>	<b>18,86</b>

Wartość funkcji celu (3) w podawanych wynikach oraz (7) dla obliczeń) wyznaczano na podstawie wyniku całkowania numerycznego metodą prostokątów. Sumowano wartości funkcji celu dla 36 (6 razy 6) punktów równomiernie rozłożonych w danym obszarze (1). W tabeli 2) przedstawiono wartości całki (3), dla różnych dokładności całkowania numerycznego, podanej w [cm/km]. Jak widać bezwzględne różnice w wynikach całkowania są rzędu [cm/km]. Charakter tych różnic jest jednak głównie systematyczny. Przykładowo przemnażając wyniki całkowania dla 36 punktów przez liczbę 1,06802 oraz dodając 0,1 mm/km można w końcowych etapach optymalizacji uzyskać przybliżenie wyniku całkowania dla 40 000 punktów (200 na 200) z dokładnością rzędu 0,1 mm/km (ostatnie dwie kolumny w tabeli 2) przedstawiają przybliżenie oraz różnicę z wynikiem o wysokiej dokładności). Biorąc to pod uwagę, oraz przez praktyczną konieczność ograniczenia złożoności obliczeniowej, ograniczono się do całkowania ze wspomnianą dokładnością – wszystkie wyniki optymalizacji są jednak podawane na podstawie całkowania dokładniejszego, dla 40 000 punktów.

**Tabela 2.** Porównanie dokładności obliczeń miary (3) przy różnej dokładności całkowania numerycznego metodą prostokątów – w poszczególnych kolumnach wyniki całkowania dla rosnącej liczby punktów rozłożonych równomiernie w obszarze (1), w cm/km. Kolejne odwzorowania 1-9 pozyskane drogą optymalizacji według całkowania dla 36 punktów – obserwowane jednocześnie zmniejszenie wartości we wszystkich kolumnach

lp.	Liczba punktów branych w całkowaniu numerycznym								1,06802* wynik (6x6)+0.01	
	3x3	4x4	5x5	6x6	10x10	20x20	100x100	200x200		
1(start)	24,150	26,476	27,604	28,225	29,144	29,535	29,661	<b>29,665</b>	<b>30,155</b>	0,49
2	19,496	22,919	24,463	25,294	26,493	26,996	27,156	<b>27,161</b>	<b>27,024</b>	-0,14
3	17,398	20,473	21,858	22,602	23,675	24,125	24,269	<b>24,273</b>	<b>24,149</b>	-0,12
4	16,543	18,874	20,083	20,683	21,551	21,917	22,033	<b>22,037</b>	<b>22,100</b>	0,06
5	15,664	17,606	18,496	18,976	19,673	19,967	20,060	<b>20,063</b>	<b>20,277</b>	0,21
6	14,647	16,849	17,855	18,398	19,185	19,515	19,621	<b>19,624</b>	<b>19,659</b>	0,04
7	14,209	16,405	17,404	17,944	18,725	19,053	19,157	<b>19,161</b>	<b>19,175</b>	0,01
8	14,085	16,304	17,318	17,866	18,661	18,996	19,102	<b>19,106</b>	<b>19,091</b>	-0,01
9	13,842	16,006	16,989	17,520	18,287	18,610	18,713	<b>18,716</b>	<b>18,722</b>	0,01

## Wyniki optymalizacji

Tabela 3 przedstawia uśrednione wyniki optymalizacji wskazaną metodą, przy przedstawionym rozwiązaniu początkowym, dla trzech omawianych parametryzacji. Przyjęto siedem wariantów rozdysponowania dwunastoma parametrami pomiędzy funkcje  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$ , dla każdej parametryzacji. Przykładowo odwzorowanie oznaczone numerem 345.1 jest odwzorowaniem zoptymalizowanym według modelu pierwszego (11.1.1), dla którego na opisanie funkcji  $q$ ,  $\rho$ ,  $c$  wykorzystano odpowiednio trzy, cztery oraz pięć parametrów. Wedle tej zasady oznaczono wszystkie odwzorowania. Wykonano dla każdego wariantu po dziesięć prób optymalizacji, tzn. łącznie dla każdej parametryzacji wykonano siedemdziesiąt prób optymalizacji.

Regularność odwzorowań sprawdzano *a posteriori*. Biorąc przykładowo warunki ograniczające dla parametryzacji drugiej (11.2.2) można sprawdzić, jak zachowują się poszczególne funkcje oraz ich pochodne (znak, monotoniczność). W tabeli 4 zestawione są wartości odpowiednich funkcji i ich pochodnych dla odwzorowania (tab. 5). Funkcje  $L$ ,  $P$  oznaczają lewą oraz prawą stronę nierówności trzeciej w warunkach (11.2.2). Jak widać, funkcje  $\rho$ ,  $\rho'$  rosną w zadanym przedziale i są dodatnie. Funkcja  $c$  rośnie po wartościach dodatnich, wobec czego na pewno dodatnia jest funkcja  $f = c/\rho$ . Funkcja  $q'$  jest ujemna i rośnie, zatem funkcja  $L = \rho'/q'$  jest ujemna i maleje. Funkcja  $P$  rośnie, jeżeli maleje  $f = c/\rho$ . Funkcja  $f = c/\rho$  maleje, jeżeli  $g = c' \rho - c \rho'$  jest ujemnego znaku. Na podstawie pochodnych  $g'$ ,  $g''$ ,  $g'''$ , ... widać, że  $g$  jest ujemna w badanym obszarze, co oznacza, że  $f = c/\rho$  maleje, a zatem rośnie (po wartościach dodatnich) funkcja  $P$ . Zatem prawa strona trzeciej nierówności w (11.2.2) jest zawsze dodatnia a lewa strona zawsze ujemna, wobec czego zachodzi  $L < P$ . Czwarta nierówność (11.2.2) jest również spełniona, ponieważ  $f = c/\rho < 1$ , więc odwzorowanie jest różnowartościowe co najmniej dla całego pasa równoleżnikowego, w którym leży Polska. Analogicznie można zbadać regularność pozostałych odwzorowań.

**Tabela 3.** Wyniki (poszczególne oraz uśrednione) optymalizacji odwzorowań wielostozkowych, według różnych wariantów rozdysponowania dwunastoma parametrami oraz dla trzech różnych modeli parametrycznych

Lp.	444.1	543.1	534.1	345.1	435.1	354.1	453.1	
1	18,68	18,76	18,78	18,83	18,63	18,78	18,70	
2	18,73	18,68	18,83	18,72	18,81	18,71	18,69	
3	18,74	18,69	18,84	18,66	18,63	18,76	18,74	
4	18,74	18,68	18,71	18,65	18,68	18,70	18,69	
5	18,83	18,70	18,84	18,65	18,68	18,86	18,71	
6	18,67	18,82	18,72	18,67	18,71	18,76	18,72	
7	18,71	18,70	18,99	18,66	18,81	18,74	18,68	
8	18,75	18,69	18,93	18,70	18,82	18,72	18,69	
9	18,84	18,72	18,77	18,70	18,88	18,91	18,71	
10	18,74	18,72	18,88	18,65	18,68	18,70	18,69	
Średnia	<b>18,74</b>	<b>18,72</b>	<b>18,83</b>	<b>18,69</b>	<b>18,73</b>	<b>18,76</b>	<b>18,70</b>	<b>18,74</b>
Lp.	444.2	543.2	534.2	345.2	435.2	354.2	453.2	
1	18,67	18,65	18,66	18,72	18,70	18,94	18,69	
2	18,67	18,69	18,74	18,70	18,71	18,81	18,73	
3	18,67	18,66	18,68	18,68	18,72	18,77	18,65	
4	18,67	18,70	18,68	18,71	18,76	18,83	18,68	
5	18,66	18,68	18,67	18,73	18,69	18,90	18,63	
6	18,69	18,74	18,67	18,70	18,74	18,92	18,64	
7	18,66	18,65	18,67	18,71	18,78	18,77	18,65	
8	18,66	18,67	18,69	18,76	18,73	18,89	18,66	
9	18,65	18,64	18,67	18,69	18,74	18,74	18,65	
10	18,67	18,79	18,67	18,73	18,74	18,74	18,72	
Średnia	<b>18,67</b>	<b>18,69</b>	<b>18,68</b>	<b>18,71</b>	<b>18,73</b>	<b>18,83</b>	<b>18,67</b>	<b>18,70</b>
Lp.	444.3	543.3	534.3	345.3	435.3	354.3	453.3	
1	18,91	18,82	18,78	18,85	18,73	18,69	18,75	
2	18,75	18,93	18,69	18,83	18,73	18,79	18,70	
3	18,70	18,89	18,75	18,90	18,67	18,74	18,79	
4	18,78	18,87	18,69	18,82	18,85	18,74	18,74	
5	18,92	18,93	18,66	18,84	18,66	18,73	18,71	
6	18,69	18,98	18,67	18,89	18,72	18,74	18,73	
7	18,76	18,73	18,73	18,80	18,66	18,68	18,75	
8	18,73	18,77	18,69	18,85	18,65	18,74	18,69	
9	18,74	18,96	18,72	18,81	18,73	18,75	18,71	
10	18,74	18,91	18,71	18,82	18,65	18,69	18,72	
Średnia	<b>18,77</b>	<b>18,88</b>	<b>18,71</b>	<b>18,84</b>	<b>18,70</b>	<b>18,73</b>	<b>18,73</b>	<b>18,77</b>

**Tabela 4.** Wielkości liczbowe funkcji, których zmienność decyduje o regularności odwzorowania, odane dla krańców pasa równoleżnikowego, w którym zawarty jest obszar Polski

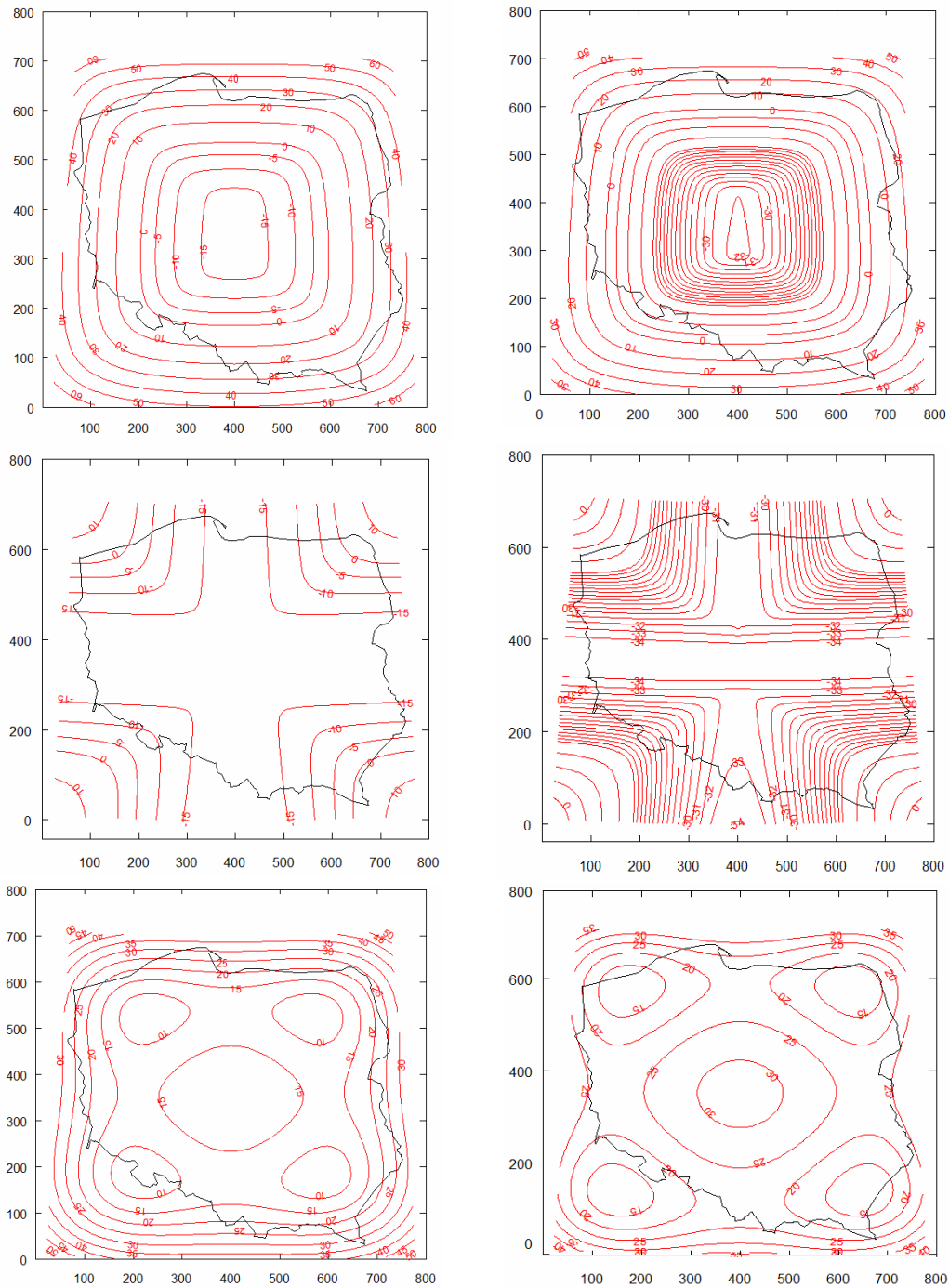
	$\rho$	$\rho^I$	$\rho^{II}$	$\rho^{III}$	$\rho^{IV}$	$\rho^V$	$q$	$q^I$	$q^{II}$	$q^{III}$	$q^{IV}$	$q^V$
$\phi = 54^\circ 50'$	0,73	1,22	0,27	-0,65	-1,50	0	-0,62	-1,00	0,01	0,01	0,08	0
$\phi = 49^\circ$	0,85	1,24	0,19	-0,80			-0,72	-1,00	0,01	0,01	0,08	
	$c$	$c^I$	$c^{II}$	$g$	$g^I$	$g^{II}$	$g^{III}$	$g^{IV}$	$g^V$		$L$	$P$
$\phi = 54^\circ 50'$	0,58	0,81	-0,33	-0,12	-0,40	-0,24	1,05	3,19	-2,49		-1,21	77,54
$\phi = 49^\circ$	0,66	0,77		-0,16	-0,41	-0,03	1,24	2,94			-1,24	82,27

**Tabela 5.** Współczynniki odwzorowania wielostokowego, którego regularność jest zbadana według tabeli czwartej, a izolinie zniekształceń przedstawione są na rysunku drugim

$\rho_0$	0,0449893219	$q_1$	-1,0111002129	$c_0$	0,0218609242
$\rho_1$	0,9880859811	$q_2$	0,0105212236	$c_0$	1,0105587214
$\rho_2$	0,1923503008	$q_3$	-0,0071136756	$c_1$	-0,1664150717
$\rho_3$	0,0448546457	$q_4$	0,0032641942		
$\rho_4$	-0,0624021179				

Funkcja celu wymusza implícite zachowanie regularności (elipsy zniekształceń zbliżone do okręgów jednostkowych są dalekie od degeneracji), a obszar odwzorowania jest stosunkowo mały (problemy z zachowaniem różnowartościowości na ogół spotykane są w przypadku obszarów całego globu lub nieco mniejszych), stąd nie powinien zaskakiwać brak konieczności uwzględnienia ograniczeń w procesie optymalizacji.

Rysunek 2 przedstawia izolinie zniekształceń odwzorowawczych najlepszego znalezionego odwzorowania dla parametryzacji (11.2.1), należącego do odwzorowań oznaczonych 453.2. Interwał ekwidformat dla zniekształceń według lokalnej miary (2) (przeciętne zniekształcenia długości we wszystkich kierunkach dla pojedynczego punktu) wynosi 5 cm/km. Interwał ekwidformat dla zniekształceń w kierunkach skal ekstremalnych jest zmienny i wynosi 10 cm/km dla zniekształceń dodatnich, 5 cm/km w zakresie -20 cm/km do 0 cm/km oraz 1 cm/km dla zniekształceń ujemnych większych niż -20 cm/km. Maksymalne zniekształcenia długości sięgają +50 cm/km i nie więcej niż -25 cm/km. Wskazanemu odwzorowaniu odpowiada integralna miara (3) równa 18,629 cm/km. Możliwe jest zmniejszenie maksymalnych zniekształceń bezwzględnych, poprzez przemnożenie przez czynnik skalujący – np.  $m_0 = 0,99985$ . Wówczas uzyskamy odwzorowanie (rozkład zniekształceń również przedstawiony na rysunku drugim) o maksymalnych zniekształceniach długości poniżej +/-40 cm/km, jednakże ma ono większą wartość miary (3), tzn. 23,608 cm/km.



**Rysunek 2.** Po lewej stronie: od góry do dołu: zniekształcenia długości w [cm/km] w kierunkach skal ekstremalnych, następnie przeciętne zniekształcenia według (2) dla odwzorowania wielostozkowego (tab. 5). Po prawej stronie: analogiczne zestawienie dla tego samego odwzorowania, którego współrzędne przemnożono przez czynnik skalujący 0,99985. Wyniki pozyskane drogą interpolacji numerycznej

## Wnioski

Dla odwzorowania początkowego, stożkowego o małych zniekształceniach długości, zanotowano przeciętną wartość zniekształceń według (3) dla obszaru (1) na poziomie 29,665 cm/km. Po optymalizacji wskazaną metodą dla modeli (11.1.1, 11.2.1, 11.3.1) uzyskano średnio dla siedemdziesięciu prób optymalizacji zniekształcenie przeciętne według (3) na poziomie odpowiednio 18,74, 18,71 oraz 18,77 cm/km, przy najlepszych wynikach na poziomie odpowiednio 18,631, 18,629 oraz 18,647 cm/km. Można stąd wnioskować, że wszystkie przedstawione modele parametryczne mają zbliżoną efektywność w kontekście optymalizacji miary integralnej (3) celem rozwiązania kryterium Airy'ego (4) dla odwzorowań wielostożkowych (6), przy zadanej metodzie optymalizacji. Gdyby przywiązywać wagę do różnic na poziomie 0,1 mm/km, wówczas statystycznie najlepsza okazała się parametryzacja (11.2.1), następnie (11.1.1) oraz (11.3.1). Parametryzacja (11.2.1) ma dodatkową zaletę polegającą na łatwiejszej interpretacji geometrycznej znaczenia poszczególnych parametrów odwzorowania. Skrajne zniekształcenia w uzyskiwanych odwzorowaniach, co do wartości bezwzględnej, mogą zostać zmniejszone poprzez przeskalowanie odwzorowania, jednak odbywa się to kosztem wyraźnego (o kilka cm/km) zwiększenia optymalizowanej miary Airy'ego. Odwzorowania mogą być optymalizowane bez ograniczeń, gdyż dla danego obszaru minimalizacja omawianej funkcji celu skutecznie wymusza także różnowartościowość odwzorowania.

## Literatura

- Canters F., 2002: Small-scale map projection design, Londyn, Nowy York: Taylor & Francis.
- Latuszek K., 2013: Zastosowanie metody optymalizacji nieliniowej Neldera-Meada do konstrukcji odwzorowań kartograficznych o możliwie najlepszym rozkładzie zniekształceń odwzorowawczych – na przykładzie odwzorowania azymutalnego. *Roczniki Geomatyki* t. 11, z. 5(62): 75-85, PTIP Warszawa.
- Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1999: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- Pędzich P., 2008: Wybrane aspekty konstruowania odwzorowań kartograficznych o możliwie najmniejszych zniekształceniach odwzorowawczych, *Roczniki Geomatyki*, t. 6, z. 4: 89-101, PTIP Warszawa.
- Snyder J.P., 1987: Map projections – a working manual, Waszyngton: United States Government Printing Office, U.S. Geological Survey Professional Paper, 1395.

## Streszczenie

*Jednym z podstawowych zadań kartografii matematycznej jest poszukiwanie odwzorowań o minimalnym całkowitym poziomie zniekształceń. Kryterium Airy'ego postuluje minimalizację kwadratów odchyleń od jedności ekstremalnych skal długości dla całego odwzorowywanego obszaru, co odpowiada minimalizacji zniekształceń długości we wszystkich kierunkach. W artykule przedstawiono zoptymalizowane ze względu na kryterium Airy'ego odwzorowanie wielostożkowe obszaru Polski. Przedstawiono trzy różne modele parametryczne odwzorowania wielostożkowego. Dla ustalonej liczby parametrów modele te zostały zoptymalizowane, z wykorzystaniem zmodyfikowanego algorytmu optymalizacji nieliniowej Neldera-Meada. Modyfikacja polegała na rozszerzeniu algorytmu Neldera-Meada o operator mutacji rozkładem normalnym, znany z algorytmów ewolucyjnych. Pozwoliło to zapobiec przedwczesnej zbieżności algorytmu. Funkcja celu wyznaczana została jako wynik całkowania numerycznego. Zbadana została regularność zoptymalizowanych odwzorowań oraz zilustrowany został rozkład zniekształceń odwzorowawczych w postaci interpolowanych numerycznie ekwidformat.*

*Przyjmując za kryterium stopu działania algorytmu liczbę obliczeń wartości funkcji celu, wybrane parametryzacje zostały porównane ze względu na osiąganą średnio przeciętną wartość zniekształceń długości w badanym obszarze. Przeciętna wartość zniekształceń długości rozumiana jest tutaj jako podniesione do kwadratu, uśrednione i spierwiastkowane zniekształcenia długości w kierunkach skal ekstremalnych – jest to odpowiednik minimalizowanej miary zniekształceń w kryterium Airy'ego.*

### **Abstract**

*One of the fundamental tasks of mathematical cartography is to find projections with minimized total distortion. Airy's criterion demands that the sum of the squares of the principal scale errors should be minimized for the mapped area, so that the scale distortion in all directions is minimal. In this article, a polyconic projection for Poland, optimized with respect to Airy's criterion will be presented.*

*Three parametric models of the polyconic projection will be discussed. For a given number of parameters, these models will be optimized, using a modified Nelder and Mead nonlinear optimization algorithm. The modification consisted of extending Nelder and Mead algorithm with a mutation operator, known from evolutionary algorithms, which adds normally distributed random values to the projection parameters. This helped to prevent the algorithm from converging to a false minimum. Regularity of the optimized projections has been inspected and the distortion pattern has been illustrated using numerically interpolated lines of constant distortion.*

*For a limited number of the objective function calculations, chosen parametric models have been compared, with respect to the averagely achieved mean scale distortion, for many algorithm evaluations, for the mapped area. The mean distortion of lengths is understood as the squared, averaged and square rooted length distortions in directions of extreme scales – it corresponds to the minimised measure of distortion according to Airy's criterion.*

mgr inż. Kamil Jan Latuszek  
k.latuszek@gik.pw.edu.pl