

ZASTOSOWANIE RACHUNKU WARIACYJNEGO DO MINIMALIZACJI ZNIEKSZTAŁCEŃ W ODWZOROWANIACH KARTOGRAFICZNYCH

APPLICATION OF VARIATIONAL CALCULUS TO MINIMIZE MAP PROJECTION DISTORTIONS

Paweł Pędzich, Katarzyna Strychalska

Politechnika Warszawska, Wydział Geodezji i Kartografii, Zakład Kartografii

Słowa kluczowe: odwzorowania kartograficzne, rachunek wariacyjny, minimalizacja zniekształceń odwzorowawczych

Keywords: map projections, variational calculus, minimization of distortion

Wstęp

Minimalizacja zniekształceń odwzorowawczych, od wieków, jest jednym z podstawowych problemów kartografii matematycznej. Konstruowaniem odwzorowań kartograficznych, spełniających różne kryteria rozkładu zniekształceń odwzorowawczych, zajmowali się najwięksi matematycy, tacy jak: Gauss, Czebyszew, Lambert, Lagrange. Pierwsze prace z zakresu minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych pojawiły się w XIX wieku, wśród nich na największą uwagę zasługują opracowania wykonane przez Tissota, Airy'ego i Czebyszewa.

August Tissot w 1860 roku podał kryterium minimalizacji zniekształceń w odwzorowaniach kartograficznych, a w 1881 roku przedstawił metodę konstrukcji odwzorowania o minimalnych zniekształceniach. Ograniczając się do aproksymacji funkcji odwzorowawczych wielomianami potęgowymi trzeciego stopnia, przedstawił odwzorowanie zbliżone do odwzorowania konforemnego stożkowego i odwzorowania konforemnego stereograficznego.

W 1861 roku George Airy opracował odwzorowanie azymutalne pośrednie pomiędzy odwzorowaniem konforemnym i odwzorowaniem równopółowym. Odwzorowanie posiadało minimalne zniekształcenia, zgodnie z zaproponowanym kryterium całkowym.

W 1853 roku rosyjski uczoney Pafnutij Lwowicz Czebyszew sformułował twierdzenie o „najlepszych” odwzorowaniach konforemnych, posiadających najmniejsze zniekształcenia długości. Podał przy tym kryterium, które pozwala minimalizować oscylację zniekształceń długości linii w całym odwzorowywanym obszarze (Pędzich, 2002; Pędzich, 2008).

Twierdzenie Czebyszewa, stanowi podstawę tworzenia odwzorowań kartograficznych konforemnych o minimalnych zniekształceniach odwzorowawczych. Stanowi również punkt odniesienia dla innych odwzorowań konforemnych. Poprzez porównanie odwzorowań kartograficznych, opracowanych według różnych kryteriów odwzorowawczych z odwzorowaniem Czebyszewa, można ocenić wartość kryterium pod względem możliwości minimalizacji zniekształceń w odwzorowywanym obszarze (Pędzich, 2008). W literaturze możemy znaleźć wiele prac poświęconych zagadnieniu tworzenia odwzorowań spełniających to kryterium:

- Urmajew w 1962 roku wyznaczył odwzorowanie Czebyszewa dla półkuli ograniczonej południkami $\lambda = -\pi/2$ i $\lambda = \pi/2$. Wartość skali długości w tym odwzorowaniu osiąga maksimum $m = 1$ na brzegu obszaru. Natomiast w środku obszaru $\varphi = 0$, $\lambda = 0$ osiąga minimum $m = 1/2$. Metoda zaproponowana przez Urmajewa nie ma charakteru ogólnego. Nie znajduje zastosowania w przypadku dowolnego obszaru (Pędzich, 2002).
- Gdowski w 1969 roku podał analityczną metodę konstruowania odwzorowań typu Czebyszewa w kole geodezyjnym. Rozwiązał zagadnienie Dirichleta przy użyciu ortonormalnego układu funkcji harmonicznym na brzegu obszaru. Również Gdowski w 1971 roku podał uproszczoną metodę konstruowania odwzorowania typu Czebyszewa w kole geodezyjnym, w postaci szeregów potęgowych, ograniczając je do wyrazów rzędu trzeciego (Pędzich, 2002).
- Miller (1953) opracował zmodyfikowane odwzorowanie stereograficzne dla Europy i Afryki. Wykonane mapy posiadają linie stałych zniekształceń w kształcie owali (Snyder, 1987).
- Lee zastosował kryterium Czebyszewa do odwzorowania stereograficznego ukośnego dla mapy Oceanu Spokojnego (Snyder, 1987).
- Snyder (1987) opracował zmodyfikowane stereograficzne konforemne odwzorowanie 48 Stanów Zjednoczonych, ograniczonych przez izoskalę o kształcie prostokątnym, z zaokrąglonymi narożnikami.
- Bugajewski (1986) podał w zarysie sposób wyznaczenia odwzorowania typu Czebyszewa metodami numerycznymi dla obszaru ograniczonego dowolną krzywą zamkniętą.
- Pędzich (2002) przedstawił rozwinięcie metody opracowanej przez Bugajewskiego oraz zastosował ją do opracowania odwzorowania Czebyszewa obszaru Polski. W metodzie tej funkcje odwzorowawcze aproksymuje się szeregami potęgowymi zmiennej zespolonej, których współczynniki wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów.

W przypadku odwzorowań równopolowych problem minimalizacji zniekształceń pozostaje nadal otwarty, między innymi Mieszczeriakow rozważał szczególnie przypadek wyznaczenia najlepszego odwzorowania Eulera, tzn. odwzorowania równopolowego z siatką ortogonalną, lecz rozważał tylko wariant gdy południk osiowy jest linią prostą. Dyer i Snyder w 1989 roku zastosowali iteracyjną metodę do rozwinięcia ogólnych formuł w odwzorowaniu równopolowym o minimalnych zniekształceniach, zaprojektowanym dla Alaski (Bugajewski, Snyder, 1995).

Istnieje wiele innych ciekawych koncepcji, dotyczących minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych, w odwzorowaniach równopolowych. Interesującym sposobem minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych, są tzw. transformacje wielomianowe istniejących odwzorowań kartograficznych (Canters, 2002). Wykorzystując opracowaną metodę, Canters zaproponował serię zmodyfikowanych odwzorowań równopolowych azymutalnych dla Unii Europejskiej (Canters, 2007).

Poszukując odwzorowania kartograficznego, często stosuje się różnego rodzaju kryteria minimalizacji zniekształceń. Kryteria te można podzielić na globalne, odnoszące się do odwzorowań minimalizujących zniekształcenia odwzorowawcze w całym odwzorowywanym obszarze oraz szczegółowe, dotyczące pewnej grupy odwzorowań, w których dana krzywa lub krzywe odwzorowują się ze stałą skalą. Kryteria globalne stosowane są zarówno do poszukiwania funkcji odwzorowawczych nieograniczonych żadnymi warunkami dodatkowymi, jak również do poszukiwania funkcji odwzorowawczych z ograniczeniami, na przykład warunkami konforemności lub równopolewości. Kryteria szczegółowe są przeważnie stosowane do wyznaczenia odwzorowań ze z góry narzuconymi warunkami dodatkowymi. Istnieje wiele prac opisujących problem konstrukcji odwzorowań w oparciu o kryteria globalne i szczegółowe.

W pracy (Fenna, 2007) przedstawiono metodę konstrukcji odwzorowania azymutalnego sfery spełniającego kryterium Airy dla obszaru ograniczonego równoleżnikiem. W 1969 roku Gdowski przedstawił metodę konstrukcji odwzorowań kartograficznych według kryterium Airy'ego, z zastosowaniem rachunku wariacyjnego (Pędzich, 2008). W pracy (Latuszek, 2013) zastosowano metodę optymalizacji Nelder-Meada do konstrukcji odwzorowania kartograficznego azymutalnego, spełniającego kryterium Airy. Grafarend i Krumm (2006) przedstawili metodę wyznaczania stałych w wybranych odwzorowaniach kartograficznych, z zastosowaniem kryterium Airy. W pracy (Balcerzak, Panasiuk, Pokrowska, 1995) wyprowadzono formuły odwzorowawcze dla odwzorowań stożkowych elipsoidy w płaszczyznę, spełniających kryteria Kawrajskiego i Eulera.

Artykuł ten, poświęcony jest zastosowaniu rachunku wariacyjnego do opracowania odwzorowań kartograficznych, spełniających kryteria globalne Airy i Fioriniego. Na przykładzie odwzorowań walcowych i azymutalnych, przedstawiono podstawowe etapy opracowania tego typu odwzorowań kartograficznych. Wyprowadzono układy równań różniczkowych Eulera-Lagrange'a oraz ich rozwiązania. Celem prezentowanej pracy było również zbadanie wielkości oraz rozkładu zniekształceń w tego typu odwzorowaniach oraz porównanie ich z innymi odwzorowaniami stosowanymi w kartografii. Ponieważ, w przypadku innych niż walcowe i azymutalne typów odwzorowań, rozwiązanie równań różniczkowych można uzyskać jedynie poprzez zastosowanie metod przybliżonych, autorzy przedstawili ich opis w zarysie. W artykule przedstawiono przeprowadzone przez autorów wstępne badania z zakresu zastosowania rachunku wariacyjnego do minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych. W przyszłości, autorzy planują dalsze prace w odniesieniu do innych odwzorowań kartograficznych, między innymi stożkowych oraz umownych, zarówno sfery jak i elipsoidy.

Rachunek wariacyjny: wyjaśnienie podstawowych pojęć, przykłady zastosowań

Rachunek wariacyjny jest działem analizy matematycznej. Rozwinął się równocześnie z rachunkiem różniczkowym, od początku jest związany z zastosowaniami matematyki, przede wszystkim w fizyce, mechanice i naukach technicznych. Problematyka rachunku wariacyjnego skupia się wokół znajdowania wartości ekstremalnych funkcjonałów. Szuka się wartości najmniejszych lub największych funkcjonałów rzeczywistych, określonych na pewnych zbiorach funkcji; w najprostszym przypadku, na zbiorach funkcji ciągłych wraz z pierwszą

pochodną na danym przedziale, spełniających określone warunki brzegowe (Grzymkowski, Pochciał, 2009).

Funkcjonały, są to odwzorowania ze zbioru funkcji w liczby rzeczywiste (van Brunt, 2004). Definiowane są zazwyczaj przez całki oznaczone:

$$I(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

gdzie F to funkcja bazowa.

Jeżeli funkcja $y(x)$ minimalizuje funkcjonal $I(y(x))$ w przedziale $[a, b]$ to funkcja $y(x)$ spełnia równanie różniczkowe Eulera-Lagrange'a, które ma postać (McQuarrie, 2006):

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Rozwiązania równania (2) nazywamy ekstremalami lub funkcjami stacjonarnymi funkcjonalu (1) (Grzymkowski, Pochciał, 2009).

Klasyczne zadania rachunku wariacyjnego to: wyznaczenie najkrótszej odległości między dwoma punktami na powierzchni, problem brachistrony, czy problem wyznaczenia zamkniętej krzywej o zadanej długości, tak aby obszar przez nią ograniczony miał największe pole (McQuarrie, 2006).

Rachunek wariacyjny znalazł też szerokie zastosowanie w kartografii matematycznej zajmującej się teorią odwzorowań kartograficznych.

Zastosowania rachunku wariacyjnego w kartografii matematycznej

Opracowując mapy dąży się do uzyskania jak najmniejszych zniekształceń odwzorowawczych. W praktyce najczęściej stosuje się odwzorowania równokątne lub równopolowe. Przyjmując jedno z wymienionych wyżej kryteriów, uzyskuje się znaczne zniekształcenia drugiego typu. Dlatego też warto rozważyć możliwość zastosowania odwzorowań kartograficznych, w których minimalizuje się zarówno zniekształcenia kątów, jak i pól powierzchni.

Rozwiązanie tego problemu można uzyskać przez zastosowanie tzw. kryteriów globalnych, tzn. takich, które pozwalają minimalizować zniekształcenia w całym odwzorowywanym obszarze. Przyjmuje się wówczas aby odwzorowanie spełniało warunek minimum jednej z tzw. miar integralnych, o postaci:

$$E = \frac{1}{P} \int_P e dP = \min \quad (3)$$

gdzie e jest to integralna miara zniekształceń, P jest polem obszaru (Pędzich, 2008).

Wśród miar integralnych możemy wyróżnić (Balcerzak, Panasiuk, Pokrowska, 1995; Pędzich, 2008):

- miary Airy

$$E_A = \frac{1}{P} \int_P [(m-1)^2 + (n-1)^2] dP \quad (4)$$

- miary Fioriniego

$$E_F = \frac{1}{P} \int_p \left[\left(\frac{m}{n} - 1 \right)^2 + (mn - 1)^2 \right] dP \quad (5)$$

- miary Jordana

$$E_J = \frac{1}{P} \int_p \left[(\ln m)^2 + (\ln n)^2 \right] dP \quad (6)$$

gdzie m i n są to ekstremalne skale długości, czyli skale długości w kierunkach głównych odwzorowania kartograficznego.

Miary Jordana i Airy pozwalają minimalizować zniekształcenia w kierunkach głównych. Stosując te miary dąży się do tego, aby w każdym punkcie płaszczyzny odwzorowania uzyskać jak najmniejsze zniekształcenia długości. Stosując kryterium Fioriniego minimalizuje się zniekształcenia pól powierzchni i kątów. Iloczyn ekstremalnych skal długości (m , n) jest równy skali pól, a iloraz tych skal jest miarą zniekształceń kątów. W obu przypadkach dąży się do uzyskania odwzorowań kartograficznych jak najbardziej bliskich odwzorowaniom izometrycznym.

Poszukiwanie funkcji odwzorowawczych, które spełniają kryteria globalne, jest zadaniem z zakresu rachunku wariacyjnego. Na przykładzie dwóch podstawowych typów odwzorowań kartograficznych, tzn. walcowych i azymutalnych, wyjaśnimy zasadę opracowania tego typu odwzorowań kartograficznych.

Odwzorowania walcowe spełniające kryterium Airy

Funkcje w odwzorowaniu walcowym, mają postać (Gajderowicz, 2009):

$$x = x(\varphi), \quad y = c\lambda \quad (7)$$

Skale ekstremalne m i n :

$$m = \frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \quad n = \frac{c}{R \cos \varphi} \quad (8)$$

Przyjmując $R = 1$ kryterium Airy dla odwzorowania walcowego przyjmuje postać:

$$E = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\left(\frac{dx}{d\varphi} - 1 \right)^2 + \left(\frac{c}{\cos \varphi} - 1 \right)^2 \right] \cos \varphi \, d\varphi = \min \quad (9)$$

Równanie różniczkowe Eulera-Lagrange'a dla odwzorowania walcowego otrzymuje następującą postać:

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} \cos \varphi - \frac{dx}{d\varphi} \sin \varphi + \sin \varphi = 0 \quad (10)$$

Przy warunkach $x(0) = 0$, $x'(\varphi_1) = x'(\varphi_2) = 1$ rozwiązaniem równania jest funkcja:

$$x = \varphi \quad (11)$$

Odwzorowanie spełniające kryterium Airy ma więc postać:

$$x R\varphi y = R\lambda \quad (12)$$

$$m = 1 \quad n = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (13)$$

Jest to znane odwzorowanie walcowe normalne równoodległościowe w kierunku południków.

Odwzorowania walcowe spełniające kryterium Fioriniego

Kryterium Fioriniego dla odwzorowania walcowego przyjmuje następującą formę:

$$E = \int_{-\varphi_k}^{\varphi_k} \left[\left(\frac{dx}{d\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\varphi} \cos \varphi - 1 \right)^2 \right] \cos \varphi \, d\varphi = \min \quad (14)$$

Równanie różniczkowe Eulera-Lagrange'a dla odwzorowania walcowego otrzymuje postać:

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} (1 + \cos^2 \varphi) - \frac{dx}{d\varphi} \sin 2\varphi + 2 \sin \varphi = 0 \quad (15)$$

Stosując metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, przy warunku $x(0) = 0$, otrzymano następujące rozwiązanie:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin \varphi}{\sqrt{2} - \sin \varphi} \right| + C \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \right) \quad (16)$$

gdy przyjmiemy warunki brzegowe takie, że:

$$x'(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad x'(\varphi_k) = x'(-\varphi_k) = 1 \quad (17)$$

wówczas stała C przyjmie postać:

$$C = (1 - \cos \varphi_k)^2 \quad (18)$$

Odwzorowanie kartograficzne walcowe spełniające kryterium Fioriniego ma więc postać:

$$x = R \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin \varphi}{\sqrt{2} - \sin \varphi} \right| + (1 - \cos \varphi_k)^2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \right) \right] \quad (19)$$

$$y = R \cos \varphi_k \lambda$$

Skala zniekształceń długości przyjmuje formę:

$$m = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} + \frac{(1 - \cos \varphi_k)^2}{1 + \cos^2 \varphi} \quad (20)$$

Przyjmując warunek, że równik odwzorowuje się bez zniekształceń, czyli dla $\varphi_k = 0$, funkcje odwzorowawcze upraszczają się do postaci:

$$x = R \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin \varphi}{\sqrt{2} - \sin \varphi} \right| \quad y = R\lambda \quad (21)$$

skala zniekształceń w kierunku południków otrzymuje postać: $m = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}$ (22)

Porównanie zniekształceń w odwzorowaniach walcowych normalnych sfery: równopolowym, równokątnym, równoodległościowym, Millera oraz wyznaczonym według kryterium Fioriniego

Porównajmy zniekształcenia w odwzorowaniach normalnych walcowych: równopolowym, równokątnym, równoodległościowym, Millera oraz wyznaczonym według kryterium Fioriniego.

Odwzorowanie Millera, nie jest ani równokątne, ani równoodległościowe. Opracowano je w 1942 roku. Celem było uzyskanie niewielkich zniekształceń odwzorowawczych. Funkcje odwzorowawcze w tym odwzorowaniu mają następującą postać (Snyder, 1987):

$$x = \frac{R \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.4\varphi\right)}{0.8} \quad (23)$$

$$y = R\lambda$$

Więcej informacji na temat odwzorowania Millera można znaleźć w pracy (Snyder 1987). Wszystkie wymienione wyżej odwzorowania mają takie same zniekształcenia w kierunku równoleżników. Skala zniekształceń długości w kierunku równoleżników jest równa:

$$n = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (24)$$

Natomiast skale długości w kierunku południków w tych odwzorowaniach przyjmują różne wartości i są równe:

- w odwzorowaniu równokątnym Merkatora (Gajderowicz, 2009):

$$m = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (25)$$

- w odwzorowaniu równopolowym (Gajderowicz, 2009):

$$m = \cos \varphi \quad (26)$$

- w odwzorowaniu równoodległościowym w kierunku południków:

$$m = 1 \quad (27)$$

- w odwzorowaniu Millera (Snyder, 1987):

$$m = \frac{1}{\cos(0.8\varphi)} \quad (28)$$

- w odwzorowaniu walcowym wg kryterium Fioriniego:

$$m = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \quad (29)$$

Zniekształcenia obliczono na podstawie wzorów: $m-1$ oraz $n-1$.

Na rysunku 1 przedstawiono zniekształcenia długości w pięciu wymienionych wyżej odwzorowaniach. Możemy zauważyć, że najmniejsze, zerowe zniekształcenia długości występują w odwzorowaniu równoodległościowym w kierunku południków. W odwzorowaniu równopolowym i Fioriniego są zbliżone do siebie, przy czym w tym drugim odwzorowaniu osiągają nieco mniejsze wartości. W odwzorowaniu Millera zniekształcenia osiągają podobne wartości jak w odwzorowaniu Fioriniego, lecz z przeciwnym znakiem. Największe zniekształcenia długości występują w odwzorowaniu Merkatora.

Na rysunku 2 przedstawiono skale zniekształceń pól w wyżej wymienionych pięciu odwzorowaniach kartograficznych. Możemy zauważyć, że w odwzorowaniu Fioriniego używano bardzo małe zniekształcenia pól, natomiast w odwzorowaniu równokątnym zniekształcenia pól powierzchni osiągają znaczne wartości. W odwzorowaniu Millera otrzymujemy znacznie większe zniekształcenia pól niż w odwzorowaniu Fioriniego.

Na rysunku 3 przedstawiono zniekształcenia kątowe, w pięciu analizowanych odwzorowaniach. Możemy zauważyć, że odwzorowania równopolowe mają największe zniekształcenia kątowe, nieco mniejsze zniekształcenia występują w odwzorowaniu Fioriniego i równoodległościowym. W odwzorowaniu Millera występują znacznie mniejsze zniekształcenia kątowe niż w wyżej wymienionych odwzorowaniach.

Na rysunku 4 przedstawiono obraz powierzchni Ziemi w analizowanych pięciu odwzorowaniach kartograficznych. Odwzorowania wyznaczone według kryteriów globalnych dają lepszy obraz – mniej zniekształcony niż odwzorowania równopolowe czy równokątne. Na podstawie mapy świata (rys. 4) można zauważyć, że w odwzorowaniu równokątnym uzyskujemy znaczne zniekształcenia pól powierzchni (przykładowo porównanie Grenlandii i Afryki), w odwzorowaniach równopolowych z kolei mamy duże zniekształcenia kątów, a więc kształt przedstawionych na mapie obszarów, szczególnie w pobliżu biegunów, jest bardzo mocno zniekształcony. Znacznie lepszy obraz uzyskujemy w odwzorowaniach, które spełniają kryterium Fioriniego i Airy. W odwzorowaniu Millera występują niewielkie zniekształcenia kątowe, jednak znaczne zniekształcenia pól powierzchni.

W praktyce, najczęściej zastosowanie znajdują odwzorowania walcowe równopolowe lub równokątne. Jednak, zniekształcenia odwzorowawcze długości w tych odwzorowaniach są znaczne. Przedstawiając duży obszar kuli ziemskiej zastosowanie odwzorowania równokątnego lub równopolowego jest niewskazane. Przykładowo w internetowych serwisach lokalizacyjnych najczęściej stosuje się odwzorowanie Mercatora. Ogromne zniekształcenia pól powierzchni w tym odwzorowaniu dają bardzo zdeformowany obraz powierzchni Ziemi. Współcześnie mapy typu Google (rys. 5) są jednym z najczęściej stosowanych źródeł informacji geograficznej, również dla młodych osób, w których utrwała się fałszywy obraz powierzchni Ziemi. Lepszym rozwiązaniem byłoby zastosowanie do opracowania map w systemach lokalizacyjnych odwzorowań walcowych, wyznaczanych według kryteriów integralnych.

Odwzorowanie azymutalne spełniające kryterium Airy

Kolejnym przykładem odwzorowania, do wyznaczenia którego zastosujemy rachunek wariacyjny jest odwzorowanie azymutalne spełniające kryterium Airy.

Odwzorowanie azymutalne normalne sfery w płaszczyznę przedstawia równanie:

$$x = \rho(h)\cos \lambda \quad y = \rho(h)\sin \lambda \quad (30)$$

gdzie: $h = \frac{\pi}{2} - \varphi$

Skale ekstremalne w odwzorowaniu wynoszą:

$$m = \frac{d\rho}{dh} = \rho_h \quad n = \frac{\rho}{\sin h} \quad (31)$$

W 1881 roku G.B. Airy wyznaczył azymutalne odwzorowanie o minimalnych zniekształceniach dla obszaru okołobiegunowego kuli ziemskiej ograniczonego równoleżnikiem o szerokości geograficznej $\varphi = 90^\circ - \beta$, podał przy tym kryterium w następującej postaci:

$$E = \int_0^\beta [(m-1)^2 + (n-1)^2] \sin h \, dh \quad (32)$$

Wyprowadzając wzory Airy popełnił błąd, który w 1862 r. został poprawiony przez Jamesa i Clarke'a. Ostatecznie formuły w odwzorowaniu azymutalnym według kryterium Airy mają postać (Fenna, 2007):

$$\rho = 2R \left[\tan \frac{h}{2} \cot^2 \frac{\beta}{2} \ln \sec \frac{\beta}{2} + \cot \frac{h}{2} \ln \sec \frac{h}{2} \right] \quad (33)$$

Przyjmując, że P jest obszarem ograniczonym równoleżnikami h_1 i h_2 kryterium Airy przyjmuje następującą formę:

$$E = \int_{h_1}^{h_2} \left[\left(\frac{d\rho}{dh} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sin h} - 1 \right)^2 \right] \sin h \, dh = \min \quad (34)$$

Znalezienie funkcji $\rho(h)$ spełniającej kryterium (34) jest zadaniem z zakresu rachunku wariacyjnego. Równanie Eulera-Lagrange'a można wówczas przedstawić w postaci:

$$(1 - \cos 2h) \frac{d^2 \rho}{dh^2} + \sin 2h \frac{d\rho}{dh} - 2\rho + 2 \sin h - \sin 2h = 0 \quad (35)$$

z warunkami:

$$\left(\frac{d\rho}{dh} \right)_{h=h_1} = 1 \quad \left(\frac{d\rho}{dh} \right)_{h=h_2} = 1 \quad (36)$$

Przyjęcie warunków (36) oznacza, że skale długości w kierunku południków na równoleżnikach, dla których $h = h_1$ oraz $h = h_2$ są równe 1.

W wyniku rozwiązania równania Eulera-Lagrange'a otrzymujemy funkcję¹:

$$\rho = A \tan \frac{h}{2} + B \cot \frac{h}{2} + 2 \cot \frac{h}{2} \ln \sec \frac{h}{2} \quad (37)$$

przy czym:

$$A = \frac{2 \left(\ln \sec \frac{h_2}{2} - \ln \sec \frac{h_1}{2} \right)}{\tan^2 \frac{h_2}{2} - \tan^2 \frac{h_1}{2}} \quad B = \frac{2 \left(\tan^2 \frac{h_1}{2} \ln \sec \frac{h_2}{2} - \tan^2 \frac{h_2}{2} \ln \sec \frac{h_1}{2} \right)}{\tan^2 \frac{h_2}{2} - \tan^2 \frac{h_1}{2}} \quad (38)$$

¹ W 1967 roku odwzorowanie to wyznaczył Gdowski i opublikował w pracy pod tytułem „Kryterium Airy i Fioriniego oraz ich uogólnienia w zastosowaniu do klasy normalnych odwzorowań azymutalnych” (Gdowski, 1967).

**Porównanie zniekształceń w odwzorowaniach
azymutalnych normalnych sfery:
równopolewym, równokątnym, równoodległościowym
oraz wyznaczonym według kryterium Airy**

Porównajmy zniekształcenia odwzorowawcze w odwzorowaniach azymutalnych: równopolewym, równokątnym, równoodległościowym w kierunku południków, równoodległościowym w kierunku równoleżników oraz wyznaczonym według kryterium Airy.

Skale ekstremalne przyjmują następującą postać w odwzorowaniach (Gajderowicz, 2009):

- azymutalnym równokątnym:

$$m = n = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi - \varphi_k}{4} - \frac{\varphi_k}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (39)$$

- azymutalnym równopolewym:

$$m = \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad n = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (40)$$

- azymutalnym równoodległościowym w kierunku równoleżników:

$$m = |\sin \varphi| \quad n = 1 \quad (41)$$

- azymutalnym równoodległościowym w kierunku południków:

$$m = 1 \quad n = \left| \frac{\varphi}{\cos \varphi} \right| \quad (42)$$

W odwzorowaniu Airy skale ekstremalne obliczamy z wzorów (31) po zróżniczkowaniu funkcji (33).

Na wykresach zaprezentowano zniekształcenia odwzorowawcze w funkcji szerokości geograficznej obliczone dla obszaru ograniczonego równoleżnikami 10° i 80°. Zniekształcenia obliczono za pomocą wzorów: $m-1$ oraz $n-1$. Na podstawie rysunku 6 można zauważyć, że zniekształcenia długości w kierunku południków w odwzorowaniu spełniającym kryterium Airy są stosunkowo niewielkie w porównaniu do pozostałych odwzorowań. Nieco mniejsze uzyskano w odwzorowaniu równopolewym. Na podstawie rysunku 7 można zauważyć, że odwzorowanie spełniające kryterium Airy posiada bardzo małe zniekształcenia długości w kierunku równoleżników.

Na kolejnych wykresach przedstawiono zniekształcenia kątowe oraz skale zniekształceń pól w funkcji szerokości geograficznej. W wyniku analizy rysunku 8 możemy stwierdzić, że odwzorowanie spełniające kryterium Airy ma stosunkowo niewielkie zniekształcenia pól powierzchni znacznie mniejsze od pozostałych odwzorowań kartograficznych. Z analizy wyników na rysunku 9 wynika, że odwzorowanie spełniające kryterium Airy ma niewielkie zniekształcenia kątów w porównaniu z innymi odwzorowaniami kartograficznymi.

Podsumowując możemy uznać, że odwzorowanie azymutalne normalne sfery spełniające kryterium Airy posiada niewielkie zniekształcenia zarówno długości, kątów, jak i pól powierzchni.

Metody przybliżone poszukiwania ekstremali spełniających warunki graniczne

Często mamy do czynienia z sytuacją, że uzyskujemy równanie Eulera-Lagrange'a, które nie da się rozwiązać prostymi metodami. Wówczas stosuje się metody przybliżone poszukiwania ekstremum funkcjonalu. Wśród metod przybliżonych poszukiwania ekstremów funkcjonalów możemy wymienić metody: Ritza, ważonych reziduiów, Galerkina lub różnicową (Łodygowski, Kąkol, 2003).

Istnieje też wiele metod numerycznych rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych. Jedną z metod przybliżonych stosowanych do rozwiązywania równań różniczkowych jest metoda szeregów potęgowych, zwana również metodą Frobeniusa (Scheid, 1989). Polega ona na poszukiwaniu funkcji w postaci szeregu potęgowego:

$$y = \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad (43)$$

Szereg ten wstawiamy do równania różniczkowego, a następnie współczynniki przy odpowiedniej potędze zmiennej przyrównujemy do zera.

Metodę opiszemy na przykładzie równania różniczkowego (15). Szereg ograniczymy do 7 początkowych wyrazów. Zakładając, że $x(0) = 0$ możemy napisać:

$$x = a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + a_5\varphi^5 + a_6\varphi^6 + a_7\varphi^7 + \dots \quad (44)$$

pochodną x' napiszemy w postaci:

$$x' = a_1 + 2a_2\varphi + 3a_3\varphi^2 + 4a_4\varphi^3 + 5a_5\varphi^4 + 6a_6\varphi^5 + 7a_7\varphi^6 + \dots \quad (45)$$

druga pochodna ma postać:

$$x'' = 2a_2 + 6a_3\varphi + 12a_4\varphi^2 + 20a_5\varphi^3 + 30a_6\varphi^4 + 42a_7\varphi^5 + \dots \quad (46)$$

Następnie wprowadzimy do równania (15) następujące rozwinięcia funkcji w szereg:

$$\sin 2\varphi = 2\varphi - 4/3\varphi^3 + 4/15\varphi^5 - 8/315\varphi^7 + \dots$$

$$\cos^2 \varphi = 1 - \varphi^2 + \varphi^4/3 - 2/45\varphi^6 + \dots \quad (47)$$

$$2\sin \varphi = 2\varphi - 1/3\varphi^3 + 1/60\varphi^5 - 1/2520\varphi^7 + \dots$$

Po podstawieniu do równania (15) i przyrównaniu do zera współczynników przy odpowiednich potęgach oraz przyjęciu warunku $x'(0) = 1$ otrzymujemy następujący wzór przybliżony na obliczenie współrzędnej x :

$$x = \varphi - 1/40\varphi^5 - 1/168\varphi^7 \quad (48)$$

Mnożąc otrzymany wzór przez promień sfery otrzymamy przybliżone wartości współrzędnych x . Możemy teraz porównać wartości obliczonych współrzędnych z wzoru przybli-

żonego (48) z wartościami uzyskanymi za pomocą wzoru (21), które przyjmujemy za dokładnie wyznaczone.

Na rysunku 10 przedstawiono wykresy funkcji (48) oraz (21). Rysunek pokazuje, że różnice między współrzędnymi są stosunkowo niewielkie. Różnice te rosną wraz z oddalaniem się od równika.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono metodę minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych z zastosowaniem rachunku wariacyjnego. Głównym celem było wyjaśnienie, na czym polega metoda oraz opracowanie przykładowych odwzorowań kartograficznych, spełniających kryteria integralne Airy i Fioriniego. W efekcie uzyskano nowe odwzorowanie kartograficzne walcowe o interesujących własnościach, mogące znaleźć zastosowanie do opracowania małoskalowych map przeglądowych w serwisach lokalizacyjnych. Stosowane w nich odwzorowanie Merkatora posiada bardzo duże zniekształcenia długości i pól powierzchni. Poprzez zastosowanie rachunku wariacyjnego otrzymujemy odwzorowania o mniejszych zniekształceniach. W atlasach geograficznych do opracowania map prezentujących całą kulę ziemską najczęściej stosuje się odwzorowania umowne, na przykład pseudowalcowe Mollweidego. Posiadają one znacznie mniejsze zniekształcenia odwzorowawcze niż odwzorowania walcowe, ale też często bardziej skomplikowane funkcje odwzorowawcze – w odwzorowaniu Mollweidego do obliczania jednej ze współrzędnych stosuje się metody iteracyjne. W odwzorowaniach walcowych funkcje odwzorowawcze mają znacznie prostszą postać (są też wyjątki np. odwzorowanie Sansona). Ponadto, zaletą odwzorowań walcowych jest to, że zbieżność południków jest równa zero. Oznacza to, że siatka kartograficzna jest siatką prostokątną. Południki i równoleżniki odwzorowują się na linie proste równoległe do osi układu współrzędnych prostokątnych płaskich. Niestety mają niewielkie możliwości minimalizacji zniekształceń. Zawsze posiadają duże zniekształcenia długości w kierunku równoleżników. Dlatego w kolejnych badaniach autorzy przeprowadzą próbę opracowania odwzorowań kartograficznych stożkowych oraz odwzorowań umownych sfery i elipsoidy. W przypadku tego typu odwzorowań kartograficznych do ich wyznaczenia niezbędne jest stosowanie metod przybliżonych.

Literatura

- Van Brunt B., 2004: *The calculus of variations*. Springer-Verlag New York.
- Bugajewski L., Snyder J., 1995: *Map projections – a reference manual*. Taylor&Francis.
- Bugajewski L., Warchiramięjewa L., Kazakowa Z., 1986: *Matematyczna kartografia*, Nedra Moskwa.
- Canters F., 2002: Small-scale map projection design, [In:] Fisher, P., Raper, J. (Eds.), *Research Monographs in Geographic Information Systems*. London and New York: Taylor & Francis.
- Canters F., 2007: Low-error map projections for pan-European equal-area mapping. *Proceedings of the 23th International Cartographic Conference*, August 4-10, Moscow, Russia, CD-ROM.
- Fenna D., 2007: *Cartographic science – a compedium of map projections with derivations*. CRC Press.
- Gajderowicz I., 2009: *Odwzorowania kartograficzne. Podstawy*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.
- Gdowski B., 1967: Kryterium Airy i Fioriniego oraz ich uogólnienia w zastosowaniu do klasy normalnych odwzorowań azymutalnych. *Geodezja i Kartografia* rocznik XVI, nr 4.
- Grafarend E., Krumm F., 2006: *Map Projections – Cartographic information systems*. Springer.

- Grzymkowski R., Pochciał J., 2009: Elementy rachunku wariacyjnego. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jana Skalmierskiego, Gliwice.
- Latuszek K., 2013: Zastosowanie metody optymalizacji nieliniowej Neldera-Meada do konstrukcji odwzorowań kartograficznych o możliwie najlepszym rozkładzie zniekształceń odwzorowawczych – na przykładzie odwzorowania azymutalnego. *Roczniki Geomatyki* t. 11, z. 5(62): 75-85, PTIP Warszawa.
- Łodygowski T., Kąkol W., 2003: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach inżynierskich. http://www.ikb.poznan.pl/almamater/biblioteka/podreczniki_akademicki/tl-wk_metoda_elementow_skonczonych/
- Miller O., 1953: A new conformal projection for Europe and Asia [sic! powinno być Afryka], *Geographical Review* vol. 43: 405-409.
- McQuarrie D., 2006: Matematyka dla przyrodników i inżynierów. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Pędzich P., 2002: Opracowanie odwzorowania kartograficznego o optymalnym rozkładzie zniekształceń według kryterium Czebyszewa dla ograniczonego obszaru powierzchni elipsoidy. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa.
- Pędzich P., 2008: Wybrane aspekty konstruowania odwzorowań kartograficznych o możliwie najmniejszych zniekształceniach odwzorowawczych. *Roczniki Geomatyki* t. 6, z. 4: 89-101, PTIP Warszawa.
- Scheid F., 1989: Shaum's outline of theory and problems of numerical analysis. McGraw-Hill Companies.
- Snyder J.P., 1987: Map projections – a working manual. United States Government Printing Office, Washington.

Streszczenie

Minimalizacja zniekształceń odwzorowawczych jest podstawowym problemem kartografii matematycznej. Do opracowania map danego obszaru dobiera się takie odwzorowania, które mają niewielkie zniekształcenia odwzorowawcze w kartowanym obszarze. Często też, dobiera się odwzorowania w zależności od celu jakemu służy dana mapa, np. w geodezji stosuje się odwzorowania równokątne, ponieważ wykonuje się pomiary kątowe, w statystyce do prezentacji danych stosuje się odwzorowania równopolowe, ponieważ dane odniesione są do pól powierzchni. Przyjęcie kryterium zachowania bez zniekształceń jednej wielkości (np. kątów, pól powierzchni) powoduje znaczne zniekształcenia innego typu. Przykładowo odwzorowania równopolowe posiadają znaczne zniekształcenia kątów, a odwzorowania równokątne znaczne zniekształcenia pól powierzchni. Dlatego interesującym celem prac badawczych z zakresu kartografii matematycznej wydaje się poszukiwanie odwzorowań takich, które nie są ani równokątne ani równopolowe, lecz posiadają niewielkie zniekształcenia obu typów. Odwzorowania takie mogą znaleźć zastosowanie w opracowaniu map przeglądowych np. w systemach nawigacji samochodowej lub internetowych serwisach o charakterze lokalizacyjnym typu Google Maps. Powszechnie stosowane w tego typu systemach odwzorowanie Merkatora nie jest dobrym rozwiązaniem, ponieważ daje fałszywy obraz rzeczywistości.

Autorzy artykułu przedstawili możliwości zastosowania rachunku wariacyjnego do minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych. Rachunek wariacyjny jest jedną z metod optymalizacji, stosowaną w wielu badaniach naukowych, zajmuje się szukaniem ekstremów funkcjonalów, określonych na przestrzeniach funkcyjnych. Zastosowanie rachunku wariacyjnego pozwala na opracowanie odwzorowań kartograficznych, w których w równym stopniu minimalizuje się zniekształcenia kątów i pól powierzchni.

Abstract

Minimizing of distortions in map projections is a basic problem of mathematical cartography. In creation of a map of a given area map projections with minimal distortion are used. Often, the choice of map projection depends on the purpose of the map, for example for military purpose conformal projections are used, because the map is used for determining the direction of flight of artillery bullets, in calculating the property tax equal-area map projections are applied. Acceptance of one distortion

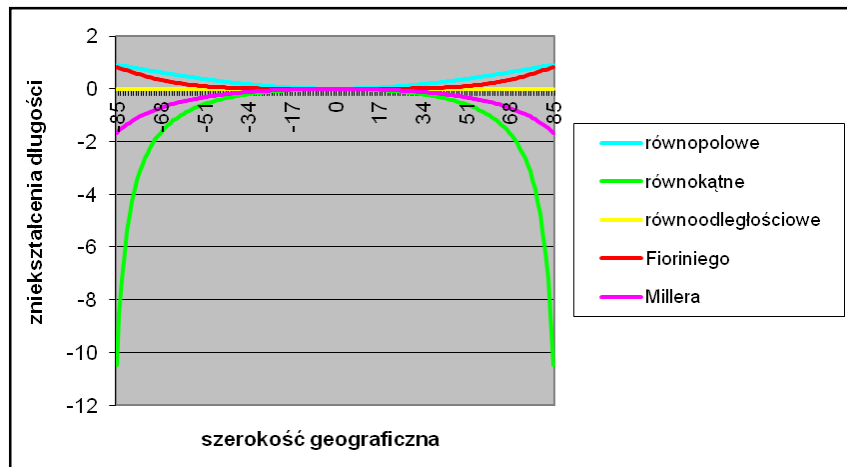
criterion (e.g. conformal or equal-area) results in significant distortion of another type. For example, equal-area map projections have substantial distortion angles and conformal map projections have significant distortions of areas. Therefore, in mathematical cartography there are used map projections which are neither conformal nor equal-area i.e. unrestricted projections. Such map projections could be used in development of review maps e. g. in car navigation systems or location type web sites e.g. Google Maps.

The authors describe application of variational calculus to minimize map distortions. The variational calculus is an optimization method used in many scientific studies, which deal with problems of determining one or more functions or a certain class of functions for which the integral reaches the extreme (highest or lowest value). The use of variational calculus allows development of cartographic mappings equally minimizing the distortion of angles and surface areas.

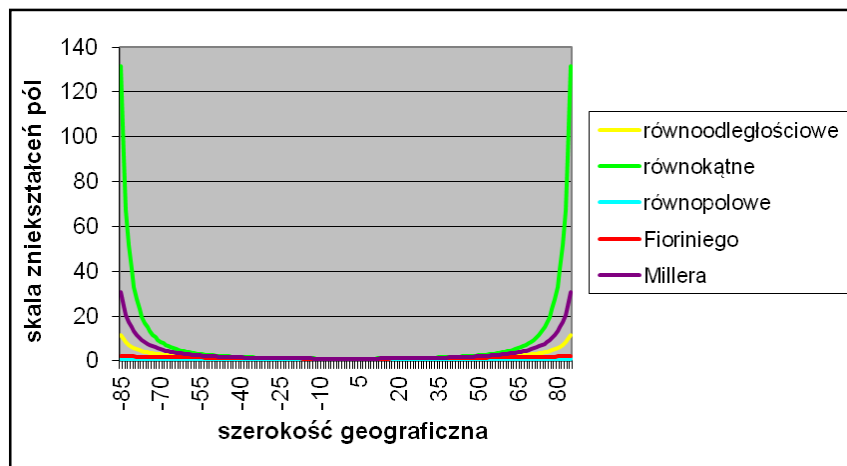
dr hab. Paweł Pędzich, prof. PW
p.pedzich@gik.pw.edu.pl

mgr inż. Katarzyna Strychalska
kstrychalska@wp.pl

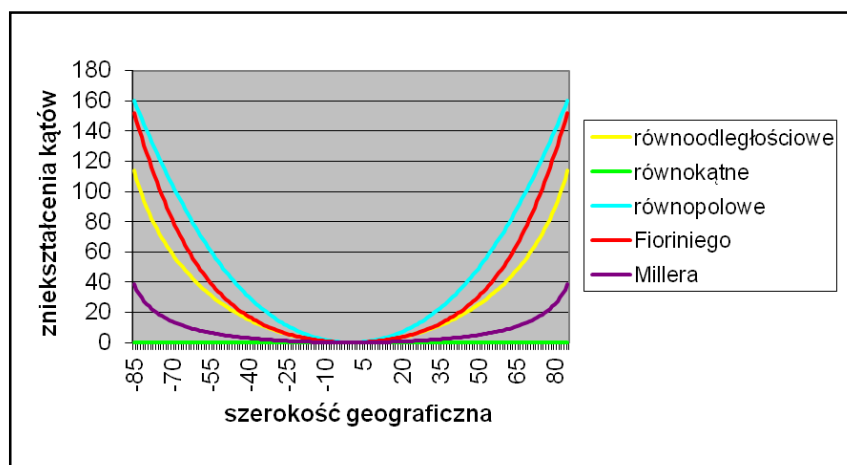
Rysunek 1.
Porównanie
zniekształceń
długości w kierunku
południków
w odwzorowaniach
walcowych
normalnych sfery

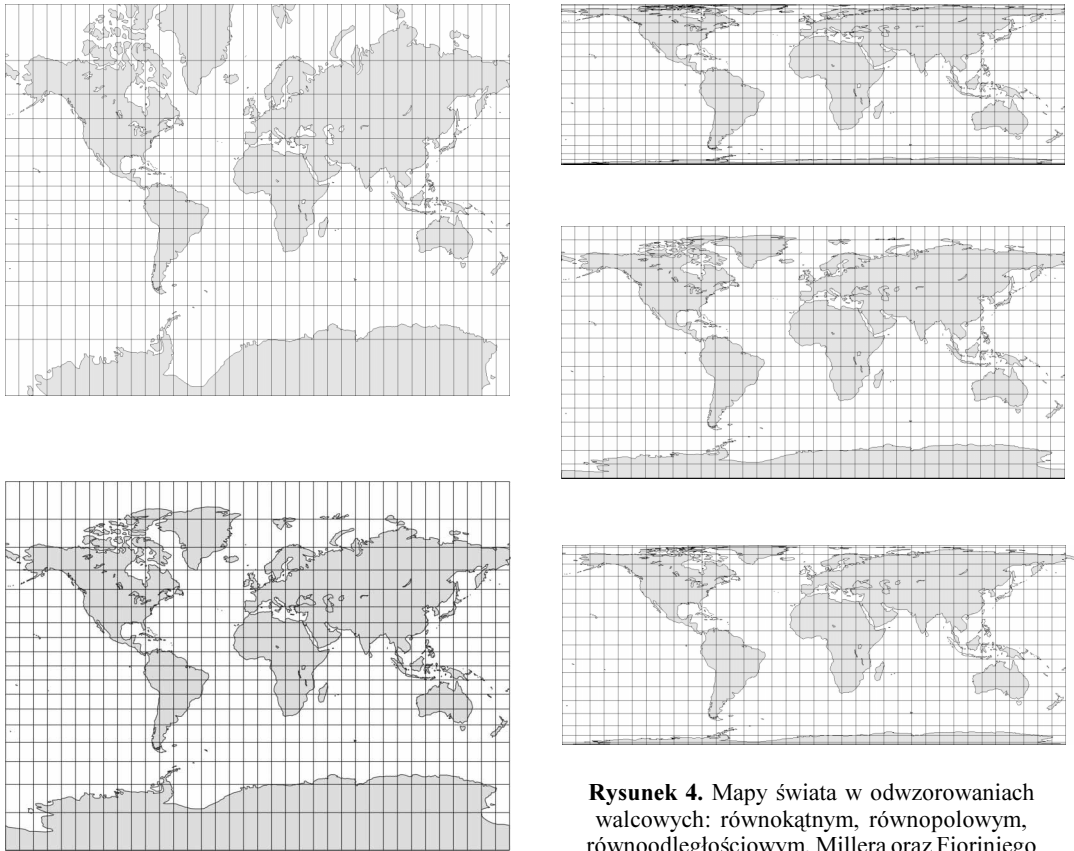


Rysunek 2.
Porównanie
skal zniekształceń
pól powierzchni

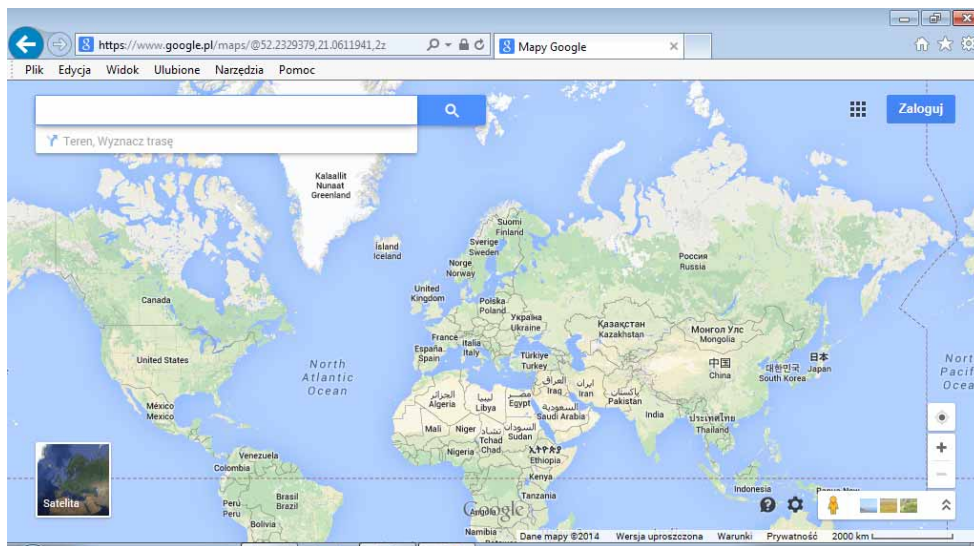


Rysunek 3.
Porównanie
zniekształceń
kątowych

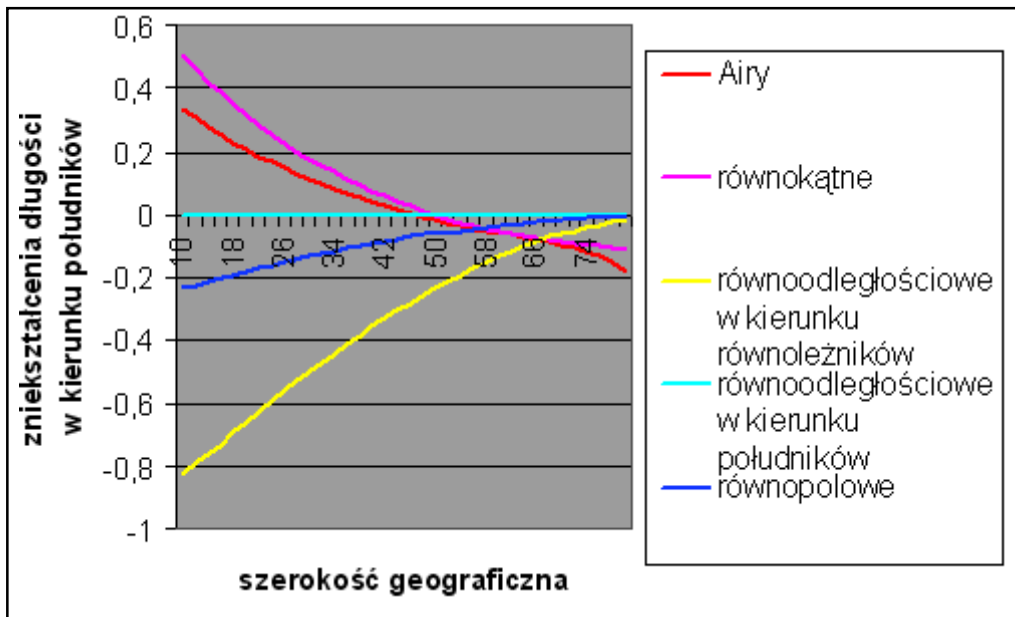




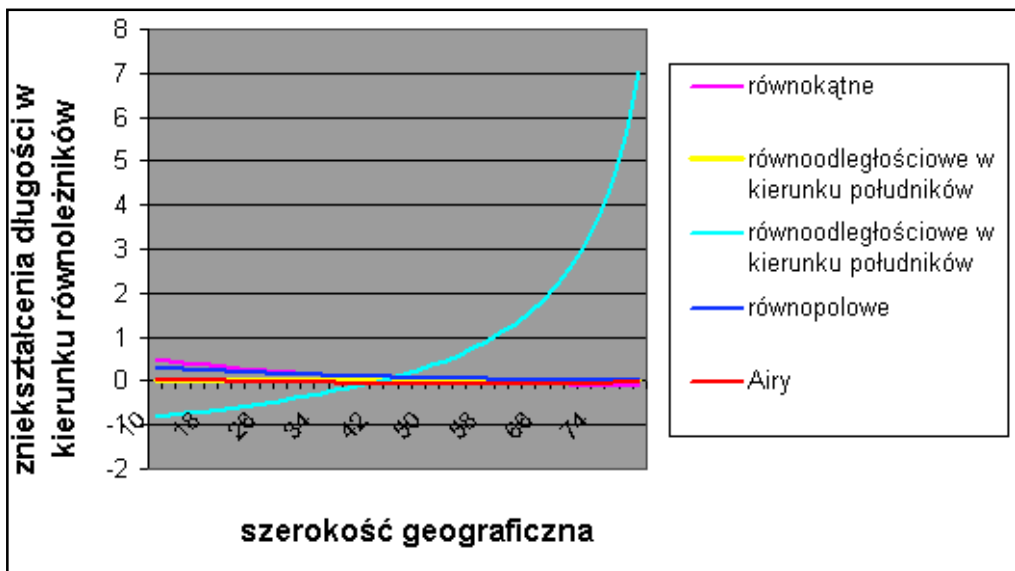
Rysunek 4. Mapy świata w odwzorowaniach walcowych: równokątnym, równopolewym, równoodległościowym, Millera oraz Fioriniego



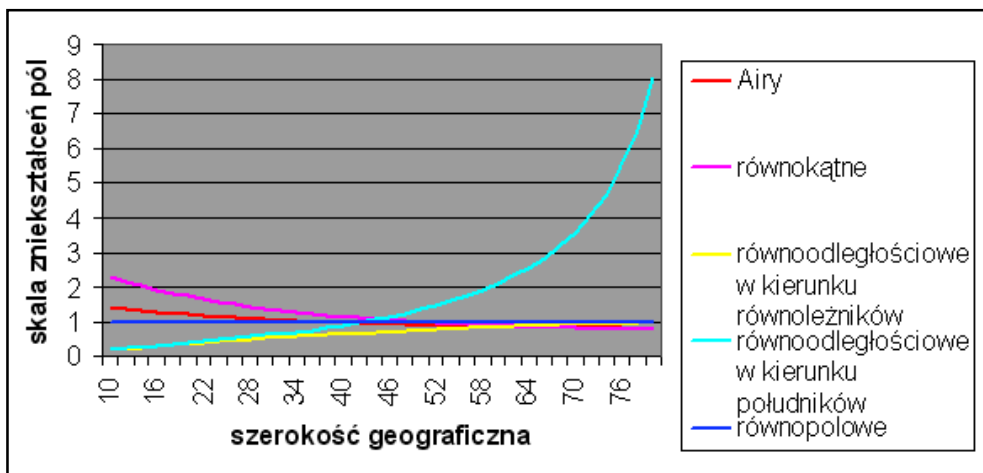
Rysunek 5. Mapa Google



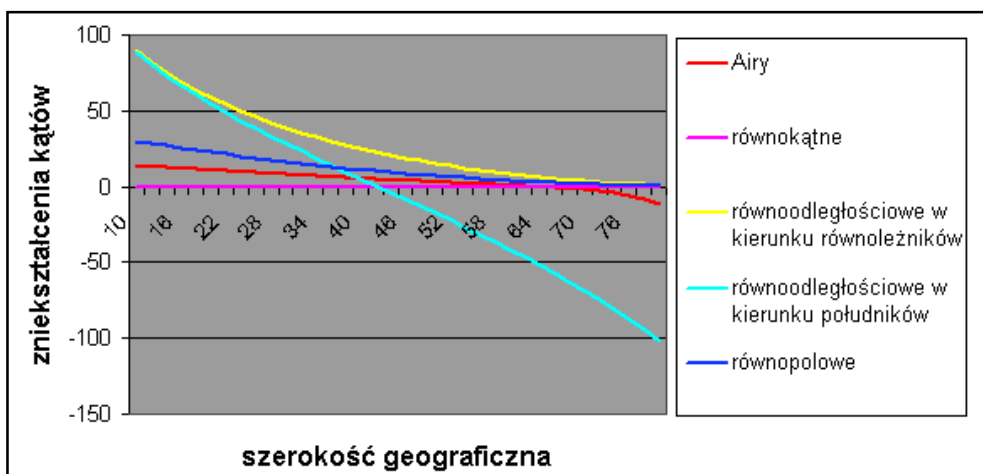
Rysunek 6. Porównanie zniekształceń długości wyznaczonych w kierunku południków



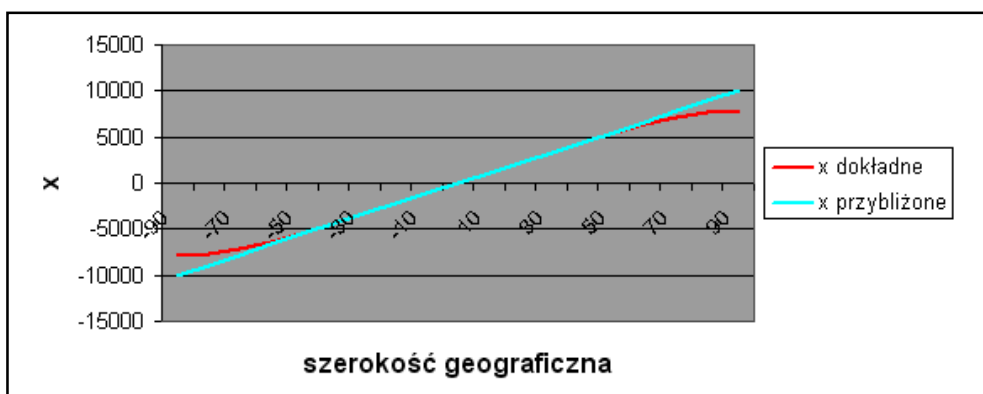
Rysunek 7. Porównanie zniekształceń długości wyznaczonych w kierunku równoleżników



Rysunek 8. Porównanie skal zniekształceń pól powierzchni



Rysunek 9. Porównanie zniekształceń kątowych



Rysunek10. Wykres funkcji (48) i (21)