

ODWZOROWANIA KARTOGRAFICZNE NIEREGULARNYCH OBIEKTÓW POZAZIEMSKICH

MAP PROJECTIONS OF IRREGULAR EXTRATERRESTRIAL OBJECTS

Paweł Pędzich, Kamil Latuszek

Politechnika Warszawska, Wydział Geodezji i Kartografii, Zakład Kartografii

Słowa kluczowe: kartografia planetarna, mapy planet i innych obiektów pozaziemskich, odwzorowania kartograficzne ciał niebieskich

Keywords: planetary cartography, maps of planets and other extraterrestrial objects, map projections of celestial bodies

Wprowadzenie

W ostatnich latach możemy zaobserwować znaczny wzrost zapotrzebowania na opracowania kartograficzne obiektów pozaziemskich, takich jak: planety, satelity planet, komety i asteroidy. Ze względu na coraz większą ilość danych pozyskiwanych przez sondy kosmiczne powstaje coraz więcej tego typu opracowań. Współcześnie wykonuje się nie tylko mapy (topograficzne, geologiczne, geochemiczne, mapy obrazowe, hipsometryczne, tektoniczne), ale również cyfrowe modele terenu, systemy informacji przestrzennej o planetach i innych ciałach niebieskich oraz wirtualne globusy. Jako przykład zastosowania systemów typu GIS w kartografii planetarnej możemy wymienić między innymi opracowany przez Laboratorium MexLAB w MIGAİK GIS dla Fobosa (rys. 1).

System pozwala na zapoznanie się z informacjami przestrzennymi o satelicie Marsa. Interfejs umożliwia użytkownikom na wykonywanie podstawowych czynności, takich jak: przesuwanie mapy, powiększanie, odczyt współrzędnych, zmianę odwzorowania kartograficznego oraz wyświetlanie warstw tematycznych.

Innym przykładem GIS planetarnego jest opracowany przez NASA system danych planetarnych (PDS – Planetary Data System) (rys. 2), który archiwizuje i udostępnia dane z amerykańskich misji kosmicznych, obserwacji astronomicznych oraz pomiarów laboratoryjnych. Dane udostępniane są bezpłatnie na stronie <http://pds.jpl.nasa.gov/>.

Kolejnym przykładem opracowania tego typu jest internetowy system udostępniający dane planetarne o nazwie PIGWAD (Planetary Interactive G.I.S. – on – the – Web Analyzable Database) (rys. 3), który opracowany został przez Służbę Geologiczną Stanów Zjednoczonych.

Główne zadania tego systemu to:

- wspomaganie innych systemów informacji geograficznej w zakresie graficznych, statystycznych i przestrzennych narzędzi do analizy danych planetarnych;
- rozpowszechnianie materiałów edukacyjnych, narzędzi, programów i informacji;
- tworzenie bazy danych planetarnych zawierającej cyfrowe mapy geologiczne, topograficzne i dane teledetekcyjne;
- zachęcanie do stosowania technologii GIS w badaniach planetarnych, w tym tworzenie ogólnie dostępnych standardów <http://webgis.wr.usgs.gov/index.html>.

Jednym z pierwszych i ważniejszych etapów opracowania każdej mapy jest dobór odwzorowania kartograficznego. W przypadku opracowania map powierzchni Ziemi zadanie to najczęściej sprowadza się do wyboru odwzorowania z listy dostępnych w systemie, w którym wykonujemy mapę. W przypadku map obiektów pozaziemskich zadanie nie jest już tak proste. Ze względu na to, że powierzchnie tych ciał są bardzo nieregularne, niezbędne jest stosowanie nieco bardziej wyszukanych odwzorowań kartograficznych. Takim odwzorowaniom poświęcony jest niniejszy artykuł.

Rodzaje nieregularnych obiektów pozaziemskich

Międzynarodowa Unia Astronomiczna rozróżnia w Układzie Słonecznym następujące grupy obiektów: planety, planety karłowate, małe ciała Układu Słonecznego oraz naturalne satelity (księżyce) tych obiektów. Planetą Układu Słonecznego nazywany jest obiekt astronomiczny krążący bezpośrednio wokół Słońca, który pod wpływem sił własnej grawitacji osiągnął stan równowagi hydrostatycznej oraz osiągnął dominację w przestrzeni wokół własnej orbity, przez oczyszczenie jej z innych względnie dużych obiektów. Planetą karłowatą nazywane jest ciało niebieskie, które spełnia wymienione kryteria za wyjątkiem osiągnięcia dominacji w otoczeniu swojej orbity. Małymi ciałami Układu Słonecznego są natomiast pozostałe obiekty orbitujące Słońce. Obiekty krążące wokół planet, planet karłowatych lub małych ciał Układu Słonecznego noszą miano naturalnych satelitów (księżyców).

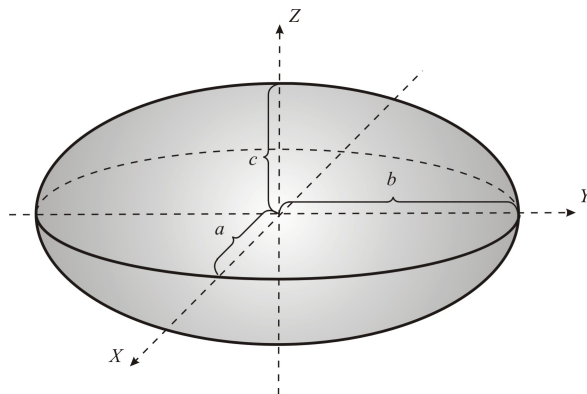
Z punktu widzenia problematyki kartografii planetarnej, a w szczególności odwzorowań kartograficznych, istotne jest rozróżnienie dwóch grup obiektów w Układzie Słonecznym. Pierwszą grupę stanowią planety, planety karłowate oraz księżyce planet i planet karłowatych, które w wyniku działania sił własnej grawitacji wytworzyły kształt odpowiadający równowadze hydrostatycznej (prawie kulisty). Za powierzchnię odniesienia tej grupy obiektów można przyjąć sferę, elipsoidę obrotową spłaszczoną lub elipsoidę trójosiową. Druga grupa obiektów, która nie spełnia kryterium równowagi hydrostatycznej gromadzi praktycznie wszystkie małe ciała Układu Słonecznego oraz większość księżyców. Kształt tych ciał niebieskich jest z reguły silnie nieregularny.

Na rysunku 4 przedstawione są rzuty ortogonalne siatek planetocentrycznych powierzchni fizycznych wybranych ciał niebieskich, które nie są w stanie równowagi hydrostatycznej (siatka planetocentryczna jest uogólnieniem siatki geograficznej – patrz następny rozdział wzór 20 i dalej). Wyraźny brak współkształtności i nieeliptyczność obrazów poszczególnych równoleżników wskazuje, że przyjęcie elipsoidy jako powierzchni odniesienia dla tych obiektów może okazać się niewystarczające, tzn. przedstawienie wzajemnego położenia obiektów powierzchniowych na płaszczyźnie mapy będzie dodatkowo obciążone błędami wynikającymi ze znacznego niedopasowania przyjętej powierzchni odniesienia.

Przypadkiem granicznym między planetą karłowatą a małym ciałem Układu Słonecznego jest asteroida Westa. Według najnowszych analiz kształtu oraz pola grawitacyjnego, dla których źródłem danych są pomiary wykonane w ramach misji kosmicznej *Dawn* (czerwiec 2011–wrzesień 2012), Westa nie jest obecnie w stanie równowagi hydrostatycznej. Asteroida najprawdopodobniej była w stanie równowagi hydrostatycznej we wczesnym okresie rozwoju, jednakże późniejsze zderzenia kosmiczne skutkujące formacją rozległych kraterów uderzeniowych na terenie półkuli południowej (*Venenia* oraz *Rheasilvia*) zaburzyły ten stan. W owym czasie plastyczność Westy była już zbyt mała, by przy swojej masie powrócić do stanu równowagi hydrostatycznej. Obecnie przyjmuje się, że rozległy region na półkuli północnej jest prawdopodobnie reliktołą powierzchnią reprezentującą stan równowagi hydrostatycznej z wczesnego okresu rozwoju Westy (Fu i in., 2014, Asmar i in., 2012).

Na rysunku 5 przedstawiono rzuty ortograficzne półkuli północnej i południowej Westy. Przyjmuje się, że kształt Westy można względnie dobrze przybliżyć powierzchnią elipsoidy trójosiowej, przy czym większe błędy dopasowania wynikające z nieregularności kształtu obserwowane są dla półkuli południowej.

Powierzchnie odniesienia i układy współrzędnych



Rysunek 6. Elipsoida trójosiowa

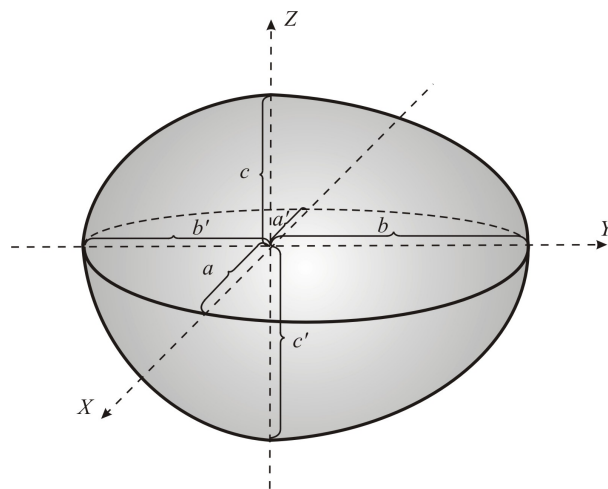
Dobór powierzchni odniesienia zależy przede wszystkim od kształtu obiektu. Planety oraz duże obiekty, takie jak księżyc czy Mars, mają regularny kształt i jako powierzchnię odniesienia przyjmuje się sferę, elipsoidę obrotową spłaszczoną lub elipsoidę trójosiową (rys. 6).

Niektóre z ciał niebieskich mają bardzo nieregularne kształty i wówczas wyżej wymienione powierzchnie nie mają zastosowania. W takich przypad-

kach można przyjąć jako najlepszą aproksymację powierzchni takiego obiektu elipsoidę o większej liczbie osi, tzn. 4, 5 lub 6. Na rysunku 7 przedstawiono elipsoidę sześćoosiową.

Do określenia położenia punktu na powierzchni odniesienia stosuje się najczęściej współrzędne planetocentryczne lub geodezyjne (czasem zwane też planetograficznymi).

Szerokość planetocentryczna ϕ jest to kąt zawarty pomiędzy prostą przechodzącą przez środek elipsoidy i dany punkt na jej powierzchni a płaszczyzną



Rysunek 7. Elipsoida sześćoosiowa

równika (rys. 8). Zależność pomiędzy współrzędnymi planetocentrycznymi a współrzędnymi prostokątnymi na elipsoidzie trójosiowej przedstawia wzór:

$$\begin{aligned} X &= \rho(\phi, \lambda) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= \rho(\phi, \lambda) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= \rho(\phi, \lambda) \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \rho(\phi, \lambda) &= \left[(\alpha \cos \phi \cos \lambda)^2 + (\beta \cos \phi \sin \lambda)^2 + (\gamma \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c} \end{aligned} \quad (2)$$

Szerokość geodezyjna ϕ oznacza kąt zawarty pomiędzy normalną do powierzchni elipsoidy a płaszczyznę równika. Natomiast długość geodezyjna jest to kąt dwuścienny zawarty pomiędzy dwoma płaszczyznami przekrojów przechodzących przez oś biegunową elipsoidy oraz początkowy i dany punkt.

Zależność pomiędzy współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi geodezyjnymi ma następującą postać:

$$\begin{aligned} X &= a \cos \phi \cos \lambda / W \\ Y &= a(1 - e_a^2) \cos \phi \sin \lambda / W \\ Z &= a(1 - e^2) \sin \phi / W \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi - e_a^2 \cos^2 \phi \sin^2 \lambda} \\ e^2 &= (a^2 - c^2) / a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2) / a^2 \end{aligned} \quad (4)$$

e – pierwszy mimośród biegunowy, e_a – pierwszy mimośród równikowy. Równania 1-4 są równaniami parametrycznymi elipsoidy trójosiowej.

Aby opisać elipsoidę sześćoosiową dzieli się ją na 8 stref i traktuje je jako części elipsoid trójosiowych. W tabeli 1 zaprezentowano opis poszczególnych stref elipsoidy sześćoosiowej.

Dla każdej strefy otrzymujemy osobne równanie, np. dla strefy I-1 półosie są oznaczone jako a , b , c , oraz równanie:

$$\begin{aligned} X &= a \cos \phi \cos \lambda / W \\ Y &= a(1 - e_a^2) \cos \phi \sin \lambda / W \\ Z &= a(1 - e^2) \sin \phi / W \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi - e_a^2 \cos^2 \phi \sin^2 \lambda} \\ e^2 &= (a^2 - c^2) / a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2) / a^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Tabela 1. Podział na strefy elipsoidy sześciosiowej (Nyrtsov i in., 2007)

Numer strefy	Współrzędne [stopnie]	Półosie
Wschodnia półkula		
I-1	φ zmienia się od -90 do 0 λ zmienia się od 0 do 90	a, b, c'
I-2	φ zmienia się od 0 do 90 λ zmienia się od 0 do 90	a, b, c
II-1	φ zmienia się od -90 do 0 λ zmienia się od 90 do 180	b, a', c'
II-2	φ zmienia się od 0 do 90 λ zmienia się od 90 do 180	b, a', c
Zachodnia półkula		
III-1	φ zmienia się od -90 do 0 λ zmienia się od 180 do 270	a', b', c'
III-2	φ zmienia się od 0 do 90 λ zmienia się od 180 do 270	a', b', c
IV-1	φ zmienia się od -90 do 0 λ zmienia się od 270 do 360	b', a, c'
IV-2	φ zmienia się od 0 do 90 λ zmienia się od 270 do 360	b', a, c

to normalna do powierzchni, a w związku z tym kąt φ_0 nie oznacza szerokości geodezyjnej.

Jeżeli w płaszczyźnie południka narysujemy okrąg o promieniu równym długości odcinka OB wówczas kąt pomiędzy odcinkiem OB oraz OP' nazywamy szerokością zredukowaną.

Zależność między współrzędnymi prostokątnymi elipsoidy trójosiowej a współrzędnymi zredukowanymi przedstawiają wzory:

$$\begin{aligned} X &= d \cos u \sin \lambda \\ X &= d \cos u \cos \lambda \\ Z &= c \sin u \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} d &= b(1 - k^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{1}{2}} \\ k^2 &= 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Zależność pomiędzy szerokością quasi-geodezyjną a szerokością zredukowaną przedstawia wzór:

$$\tan \varphi^0 = \frac{d}{c} \tan u \quad (11)$$

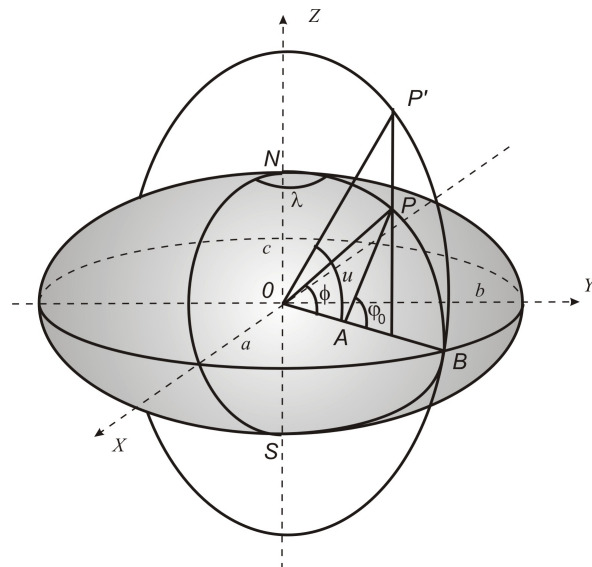
Dla strefy III-2, gdzie półosie a' , b' , c równanie będzie miało następującą postać:

$$\begin{aligned} X &= a' \cos \varphi \cos \lambda / W \\ Y &= a'(1 - e_a^2) \cos \varphi \sin \lambda / W \\ Z &= a'(1 - e^2) \sin \varphi / W \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi - e_a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} \\ e^2 &= (a'^2 - c^2) / a'^2 \\ e_a^2 &= (a'^2 - b'^2) / a'^2 \end{aligned} \quad (8)$$

W procesie konstrukcji odwzorowań kartograficznych często także mają zastosowanie szerokości zredukowane oraz szerokości quasi-geodezyjne. Szerokość quasi-geodezyjna φ_0 jest to kąt zawarty między normalną (na rysunku 8 odcinek AP) do elipsy południka a płaszczyzną równika. W przypadku elipsoidy obrotowej spłaszczonej prosta ta jest jednocześnie normalną do elipsoidy. Jednak dla elipsoidy trójosiowej nie jest



Rysunek 8. Szerokość quasi-geodezyjna oraz zredukowana na elipsoidzie trójosiowej

Natomiast wzajemne relacje pomiędzy szerokością geodezyjną, quasi-geodezyjną oraz zredukowaną przedstawiają wzory (Bugayevskiy, Snyder 1995):

$$\sin \varphi = \frac{d \sin^2 u}{\sqrt{c^2 \cos^2 u (1 + z^2) + d^2 \sin^2 u}} \quad (12)$$

lub

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi^0}{\sqrt{1 + z^2 \cos^2 \varphi^0}} \quad (13)$$

gdzie:

$$z = \frac{k^2 \sin 2\lambda}{2(1 - k^2 \cos^2 \lambda)} \quad (14)$$

Jacobi wprowadził pojęcie współrzędnych eliptycznych u_1, u_2, u_3 na elipsoidzie trójosiowej.

Współrzędne te odnoszą się do trzech powierzchni drugiego stopnia, posiadających te same pary ognisk (hiperboloidy jednowpłokowej, hiperboloidy dwuwpłokowej oraz elipsoidy trójosiowej). Dla danej elipsoidy wartość u_3 jest stała. Współrzędne te otrzymuje się w wyniku rozwiązania równania (Nyrtsov i in., 2014):

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1 \quad (15)$$

gdzie $a > b > c$.

Pierwiastkami powyższego równania są:

$$u_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, u_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, u_3 = 0 \quad (16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} p &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\ q &= -x^2 b^2 - x^2 c^2 - y^2 a^2 - y^2 c^2 - z^2 a^2 - z^2 b^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Współrzędne te wykorzystuje się między innymi do konstrukcji odwzorowań konforemnych Jacobiego.

Więcej na temat współrzędnych eliptycznych można znaleźć w pracy (Nyrtsov i in., 2014).

Odwzorowania kartograficzne obiektów nieregularnych

Odwzorowania morfograficzne są zmodyfikowanymi odwzorowaniami azymutalnymi sfery, w których stały promień wodzący powierzchni zastąpiono zmiennym promieniem, określonym jako suma promienia wodzącego R powierzchni sfery oraz wysokości h danego punktu nad tą sferą. Długość i szerokość planetocentryczna φ, λ , wraz z promieniem wodzącym $R_i = R + h$, stanowią razem współrzędne biegunowe opisujące powierzchnię ciała o

nieregularnym kształcie. Ogólny wzór na współrzędne płaskie w odwzorowaniu morfograficznym azymutalnym jest postaci (Nyrtsov i in., 2006; Wahlisch i in., 2013):

$$X = (R+h)f_1(\varphi) \cos \lambda \quad Y = (R+h)f_2(\varphi) \sin \lambda \quad (18)$$

Podobnie można modyfikować inne rodzaje odwzorowań. Wzór ogólny zmodyfikowanych odwzorowań powierzchni nieregularnych ma postać:

$$X = f_1(R_i, \varphi, \lambda) \quad Y = f_2(R_i, \varphi, \lambda) \quad (19)$$

Rzuty ortograficzne ciał niebieskich zaprezentowane w poprzednim rozdziale (rys. 4, 5) są odwzorowaniami morfograficznymi (ortograficznymi) postaci:

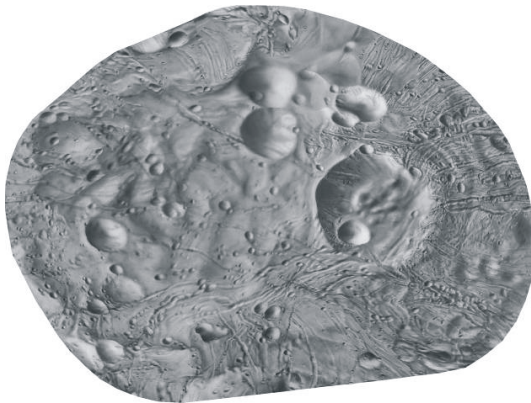
$$X = (R+h) \cos \varphi \cos \lambda; \quad Y = (R+h) \cos \varphi \sin \lambda \quad (20)$$

Należy mieć na uwadze miejscową nieregularność tych odwzorowań wywołaną wahaniami długości promienia wodzącego $R_i = R + h$ powierzchni dla poszczególnych równoleżników.

Wzory ogólne na odwzorowania zmodyfikowane walcowe oraz pseudowalcowe przedstawiają równania (21)–(22) (Nyrtsov i in., 2006).

$$X = (R+h)f_1(\varphi) \quad Y = (R+h)f_2(\lambda) \quad (21)$$

$$X = (R+h)f_1(\varphi) \quad Y = (R+h)f_2(\varphi, \lambda) \quad (22)$$



Rysunek 9. Fobos w odwzorowaniu morfograficznym

(źródło: http://sbn.psi.edu/pds/asteroid/EAR_A_3_RDR_STOOKEMAPS_V1_0/maps)

Na rysunku 9 przedstawiono Fobosa w odwzorowaniu morfograficznym.

Opisane wyżej odwzorowania morfograficzne i zmodyfikowane pozwalają prawidłowo przedstawić skomplikowany kształt obiektu nieregularnego, jednakże ze względu na brak formalnego opisu powierzchni oryginału, nie jest możliwe wyznaczenie zniekształceń odwzorowawczych.

Elipsoida trójosiowa może być powierzchnią odniesienia dla obiektów o kształcie zbliżonym do reprezentującego stan równowagi hydrostatycznej takich jak Westa. W zależności od wymaganej dokładności geometrycznej opracowania kartograficznego oraz dokładności danych

źródłowych, odwzorowanie kartograficzne elipsoidy trójosiowej może się okazać właściwe również dla niektórych innych, mniejszych i bardziej nieregularnych ciał niebieskich.

Przykładem odwzorowania elipsoidy trójosiowej jest odwzorowanie konforemne Jacobiego. Funkcje odwzorowawcze mają następującą postać (Nyrtsov i in. 2014):

$$x = \int_{b^2}^{u_1} \sqrt{\frac{u}{(c^2-u)(b^2-u)(a^2-u)}} du \quad (23)$$

$$y = \int_{c^2}^{v_1} \sqrt{\frac{-v}{(c^2-v)(b^2-v)(a^2-v)}} dv \quad (24)$$

gdzie $u = u_1$, $v = u_2$ wyraża się wzorem (16).

Zakładając, że $a > b > c$ powyższe całki możemy przedstawić za pomocą całek eliptycznych, wówczas otrzymujemy wzory:

$$x = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \left[(b^2 - c^2) \Pi(\varphi_i, k_2, k_1) + a^2 F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \right] \quad (25)$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \left[(b^2 - a^2) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, k_2, k_1\right) + a^2 F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \right] - \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)b^2}} \left[(b^2 - a^2) \Pi(\varphi_i, k_2, k_1) + a^2 F(\varphi_i, k) \right] \quad (26)$$

gdzie $\Pi(\varphi_i, k_2, k_1)$ oznacza całkę eliptyczną trzeciego rodzaju, a $F(\varphi_i, k)$ całkę eliptyczną pierwszego rodzaju.

We wzorze (25) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\varphi_i = \arcsin \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(u - b^2)}{(a^2 - b^2)(u - c^2)}} \quad (27)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)c^2}{(a^2 - c^2)b^2}} \quad k_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

oraz we wzorze (26) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\varphi_i = \arcsin \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(a^2 - v)}} \quad (28)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)a^2}{(a^2 - c^2)b^2}} \quad k_2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

Rozwinięcie w szereg całki eliptycznej pierwszego rodzaju ma postać (Byrd, 1954):

$$F(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^m \binom{m}{m} t_{2m}(\varphi) \quad (29)$$

Rozwinięcie w szereg całki eliptycznej trzeciego rodzaju wyraża się jako

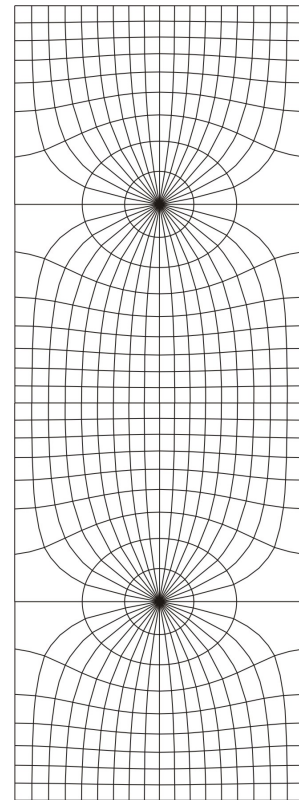
$$\Pi(\varphi, \alpha^2, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m (\alpha^2)^m t_{2m}(\varphi) \left(\frac{-1}{2} \right)^j \left(\frac{k^2}{-\alpha^2} \right)^j \quad (30)$$

gdzie: $t_0(\varphi) = \varphi$ $t_2(\varphi) = \frac{1}{2}[\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]$

$$t_4(\varphi) = \frac{1}{8}[3\varphi - \sin \varphi \cos \varphi(3 + 2 \sin^2 \varphi)] \quad (31)$$

⋮

$$t_{2m}(\varphi) = \frac{2m-1}{2m} t_{2(m-1)}(\varphi) - \frac{1}{2m} \sin^{2m-1} \varphi \cos \varphi$$



Rysunek 10. Siatka kartograficzna w odwzorowaniu konforemnym Jacobiego Westy (elipsoida trójosiowa o półosiach: $a=284,50$ km, $b=277,25$ km, $c=226,43$ km)

Przedstawione wzory pozwalają na obliczenie współrzędnych prostokątnych w odwzorowaniu Jacobiego. Na ich podstawie opracowano siatkę kartograficzną, którą zaprezentowano na rysunku 10.

Poniżej przedstawiono formuły odwzorowawcze kilku wybranych odwzorowań kartograficznych. Wzory są w postaci funkcji opisanych wcześniej współrzędnych: planetocentrycznych, geodezyjnych i quasi-geodezyjnych.

Odwzorowanie walcowe równołużnościowe wzdłuż południków jako funkcja szerokości quasi-geodezyjnej (http://geocnt.geonet.ru/en/3_axial):

$$x = b \int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{1 - (2 - e_1^2) e_1^2 \cos^2 \lambda}}{(1 - e_1^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda \quad (32)$$

$$y = \int_0^{\varphi_0} \frac{d_{el} (1 - e_d^2)}{(1 - e_d^2 \sin^2 \varphi_0)^{\frac{3}{2}}} d\varphi_0 \quad (33)$$

gdzie:

$$e_1^2 = (a^2 - b^2) / a^2$$

$$d_{el} = \frac{b}{\sqrt{1 - e_1^2 \cos^2 \lambda}} \quad (34)$$

$$e_d^2 = (d_{el}^2 - b^2) / d_{el}^2$$

Odwzorowanie walcowe równołużnościowe wzdłuż południków jako funkcja szerokości planetocentrycznej

$$x = b \int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{1 - (2 - e_1^2) e_1^2 \cos^2 \lambda}}{(1 - e_1^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda \quad (35)$$

$$y = c \int_0^{\phi} \frac{\sqrt{1 - (2 - e_d^2) e_d^2 \cos^2 \phi}}{(1 - e_d^2 \cos^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi \quad (36)$$

Odwzorowanie azymutalne równołużnościowe w kierunku południków jako funkcja szerokości planetocentrycznej

$$\rho = c \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - (2 - e_d^2) e_d^2 \cos^2 \phi}}{(1 - e_d^2 \cos^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi \quad (37)$$

$$\quad (38)$$

$$x = \rho \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = \rho \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (39)$$

Całki (32)–(39) oblicza się stosując metody całkowania numerycznego. Wyniki obliczeń współrzędnych oraz przykładowe siatki kartograficzne można zobaczyć na stronie internetowej GIS Research Centre http://geocnt.geonet.ru/en/3_axial.

Dla obiektów silnie nieregularnych wskazane jest zastosowanie odwzorowania morfograficznego lub odwzorowania powierzchni o bardziej skomplikowanym kształcie niż elipsoida trójosiowa. Zastosowanie elipsoidy sześćoosiowej jako powierzchni oryginału w odwzorowaniu obiektu nieregularnego ma następujące zalety:

- umożliwia wierniejsze ukazanie wzajemnych relacji przestrzennych wskazanych zjawisk oraz obiektów powierzchniowych ciała o nieregularnym kształcie, niż w przypadku odwzorowań elipsoidy trójosiowej,
- zachowuje możliwość obliczania zniekształceń odwzorowawczych,
- pozwala na wykorzystanie wzorów opisujących niektóre odwzorowania elipsoidy trójosiowej.

Elipsoida sześćoosiowa dzieli się na osiem stref, z których każda jest płatem elipsoidy trójosiowej, określonej przez inną kombinację trzech spośród sześciu półosi a, b, c, a', b', c' . Odwzorowanie walcowe równodługościowe w kierunku południków elipsoidy trójosiowej o odwzorowującym się bez zniekształceń równiku jest przykładem odwzorowania, które może zostać zastosowane do przedstawienia powierzchni elipsoidy sześćoosiowej. Aby tego dokonać wystarczy podstawiać w formułach odwzorowawczych kolejne wartości półosi dla poszczególnych stref odwzorowawczych. Uzyskane odwzorowanie jest regularne i spełnia warunek wiernego odwzorowania odległości wzdłuż południków. Formuły odwzorowawcze odwzorowania są następujące (Nyrtsov, Bugayevskiy, 2007):

$$Y = \Phi_0 \lambda \quad (40)$$

gdzie $s(\varphi, \lambda)$ oznacza długość łuku południka i wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} s &= a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \frac{a_8}{8} \sin 8B - \dots \\ a_0 &= m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8 + \dots \\ a_2 &= \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6 + \frac{7}{16} m_8 + \dots \\ a_4 &= \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16} m_6 + \frac{7}{32} m_8 + \dots \\ a_6 &= \frac{m_6}{32} + \frac{m_8}{16} + \dots \\ a_8 &= \frac{m_8}{128} + \dots \end{aligned} \quad (41)$$

$$m_0 = d(1 - p^2)$$

$$m_2 = \frac{3}{2} p^2 m_0 \quad (42)$$

$$m_4 = \frac{5}{4} p^2 m_2$$

$$m_6 = \frac{7}{6} p^2 m_4$$

$$m_8 = \frac{9}{8} p^2 m_6$$

.....

gdzie:

$$d = b(1 - k^2 \cos^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$p^2 = 1 - (c/d)^2$$

$$k^2 = 1 - (b/a)^2$$

$$\Phi_0 = r_0(1 + z^2 \cos^2 B_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$z = \frac{k^2 \sin 2\lambda}{[2(1 - k^2 \cos^2 \lambda)]} \quad (44)$$

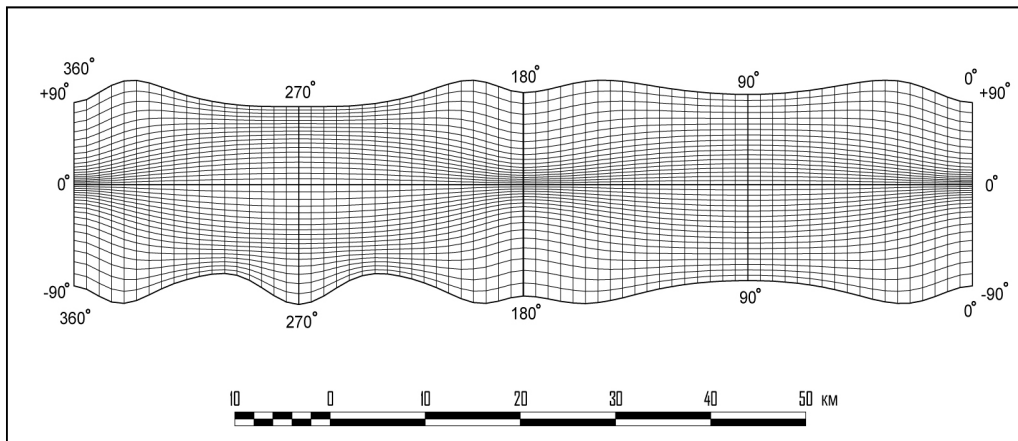
$$r_0 = N_0 \cos B_0$$

$$N_0 = \frac{d_0}{\sqrt{1 - p_0^2 \sin^2 B_0}}$$

$$d_0 = b(1 - k^2 \cos^2 \lambda_0)^{-\frac{1}{2}}$$

$$p_0^2 = 1 - (c/d_0)^2$$

Rysunek 11 przedstawia siatkę kartograficzną odwzorowania walcowego równołużnościowego w kierunku południków powierzchni elipsoidy trójosiowej, przyjętej jako powierzchnia oryginału dla asteroidy Eros ($a = 14274,9$ m, $b = 7583,6$ m, $c = 6250,2$ m, $a' = 15804,3$ m, $b' = 4750,8$ m, $c' = 5839,6$ m).



Rysunek 11. Siatka kartograficzna w odwzorowaniu walcowym równołużnościowym w kierunku południków elipsoidy sześciosiowej (Nyrtsov, Bugayevskiy, 2007)

Podsumowanie

Wraz z eksploracją kosmosu rozwija się specjalność zwana kartografią planetarną. Jednym z problemów kartografii planetarnej jest wierne odwzorowanie powierzchni ciał niebieskich o nieregularnych kształtach. Znane odwzorowania kartograficzne sfery oraz elipsoidy obrotowej spłaszczonej okazują się niewystarczające do tego celu. Wymagane jest poszukiwanie zarówno nowych odwzorowań, jak i bardziej skomplikowanych powierzchni odniesienia.

Zbiór obiektów nieregularnych stanowią tzw. małe ciała Układu Słonecznego oraz większość naturalnych satelitów planet. Mała masa oraz liczne kolizje z innymi obiektami kosmicznymi uniemożliwiły tym ciałom niebieskim osiągnięcie kulistego kształtu.

Elipsoida trójosiowa jest odpowiednią powierzchnią odniesienia dla obiektów takich jak Westa, o stosunkowo dużej masie i względnie regularnym kształcie. Dla obiektów o bardziej nieregularnym kształcie zasadne jest poszukiwanie bardziej skomplikowanych powierzchni odniesienia. Elipsoida sześciosiowa jest powierzchnią składającą się ze stref, które są fragmentami elipsoid trójosiowych o różnych długościach półosi. Powierzchnia ta może być znacznie lepiej wpasowana w fizyczną powierzchnię omawianych obiektów niż tradycyjne powierzchnie odniesienia.

Przykładem odwzorowania elipsoidy trójosiowej jest odwzorowanie konforemne Jacobiego, wykorzystujące wprowadzone przez badacza pojęcie współrzędnych eliptycznych. Znane są również między innymi odwzorowania równodługościowe wzdłuż południków: azymutalne i walcowe. Odwzorowanie walcowe, równodługościowe w kierunku południkowym, o odwzorowującym się bez zniekształceń równiku jest przykładem odwzorowania, którego formuły dla elipsoidy trójosiowej można łatwo wykorzystać dla elipsoidy sześciosiowej.

Wierne przedstawienie wzajemnych relacji przestrzennych zjawisk i obiektów na powierzchni obiektu nieregularnego można również uzyskać wykorzystując tak zwane odwzorowania morfograficzne oraz inne konstruowane według podobnych zasad. Zaletą tych odwzorowań jest możliwość modyfikacji znanych zależności dla odwzorowań sfery przez uwzględnienie zmiennej długości promienia wodzącego powierzchni danego obiektu, co pozwala przedstawić na mapie nawet bardzo skomplikowany kształt. Słabą stroną tych odwzorowań jest pominięcie definicji powierzchni odniesienia, co uniemożliwia dalsze formalne określenie zniekształceń odwzorowawczych.

Literatura

- Asmar S.W., Konopliv A.S., Park R.S., Bills B.G., Gaskell R., Raymond C.A., Russell C.T., Smith D.E., Toplis M.J., Zuber M.T., 2012: The gravity field of Vesta and implications for interior structure. 43rd Lunar and Planetary Science Conference, <http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2012/pdf/2600.pdf>
- Bugayevskiy L., Snyder J., 1995: Map projections. A reference manual. Taylor&Francis.
- Byrd P., 1954: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Springer-Verlag.
- GIS Research Centre of the Institute of Geography of the Russian Academy of Sciences, 2012: Cartographical Projections of Triaxial Ellipsoid http://geocnt.geonet.ru/en/3_axial
- Fu R.R., Hager B. A., Ermakov A.I., Zuber M.T., 2014: Efficient early global relaxation of asteroid Vesta. *Icarus*, Academic Press Elsevier, doi:10.1016/j.icarus.2014.01.023.
- Nyrtsov M.V., Bugayevskiy L.M., Shingareva K.B., 2006: Mathematical Basis for Non-Spherical Celestial Bodies Maps, *Journal of Geospatial Engineering* 2 (2): 45-50.

- Nyrtsov M.V., Bugayevskiy L.M., Stooke P.J., 2007: The multiple axis ellipsoids as reference surfaces for mapping of small celestial bodies [In:] Proceedings of XXIII International Cartographic Conference, Moskwa, http://icaci.org/files/documents/ICC_proceedings/ICC2007/html/Proceedings.htm
- Nyrtsov M., Fleis M., Borisov M., Stooke P., 2014: Jacobi conformal projection of the triaxial ellipsoid: new projection for mapping of small celestial bodies. [In:] M. Buchroithner et al. Cartography from Pole to Pole. Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, Springer-Verlag, 235-246.
- Wahlisch M., Stooke P.J., Karachevtseva I.P., Kirk R., Oberst J., Willner K., Nadejdina I.A., Zubarev A.E., Konopikhin A.A., Shingareva K.B., 2013: Phobos and Deimos Cartography, *Planetary and Space Science*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.pss.2013.05.012>

Źródła internetowe:

<http://cartsrv.mexlab.ru/geoportal/>

<http://pds.jpl.nasa.gov/>

<http://webgis.wr.usgs.gov/index.html>

<http://sbn.psi.edu/pds/asteroid>

http://sbn.psi.edu/pds/asteroid/EAR_A_3_RDR_STOOKEMAPS_V1_0/maps

Streszczenie

Informacja przestrzenna może dotyczyć nie tylko powierzchni Ziemi, ale także innych ciał niebieskich. Sondy kosmiczne przesyłają na Ziemię coraz więcej danych, które są następnie przetwarzane i na ich podstawie tworzone są różnego rodzaju opracowania kartograficzne, takie jak: mapy hipsometryczne, topograficzne, albedo, wirtualne globusy, bazy danych przestrzennych, modele terenu itp.

W przypadku planet Układu Słonecznego, takich jak: Wenus, Mars, a także większych księżyców planet zewnętrznych, typowa mapa zawiera najczęściej informacje o rzeźbie terenu oraz o wzajemnych relacjach przestrzennych i kształcie charakterystycznych form ukształtowania terenu (np. kraterów, równin, pasm górskich). Za powierzchnię odniesienia dla tych ciał niebieskich z reguły można przyjąć elipsoidę obrotową, gdyż są one na tyle masywne, by siłami własnej grawitacji uzyskać kształt zbliżony do kulistego.

Istnieje jednak w Układzie Słonecznym znaczna liczba tzw. małych ciał niebieskich, o średnicy do kilkuset kilometrów (głównie planetoidy i komety), których kształt jest nieregularny. Bodźcem do rozwoju kartografii obiektów tego typu jest pozyskiwanie coraz dokładniejszych danych źródłowych, dotyczących ich powierzchni. Na szczególną uwagę zasługują tutaj satelity Marsa: Fobos i Deimos. Opracowanie mapy takich obiektów wymaga zastosowania niekonwencjonalnych rozwiązań w zakresie doboru powierzchni oryginału oraz odwzorowań kartograficznych.

Autorzy w artykule przedstawili podstawowe problemy współczesnej kartografii planetarnej. Szerzej opisali problem zastosowania odwzorowań kartograficznych obiektów nieregularnych. Przedstawili podstawowe rodzaje odwzorowań kartograficznych, ich charakterystykę, a także przykładowe mapy opracowane na ich podstawie.

Abstract

Spatial information may relate not only to the Earth's surface, but also to other celestial bodies. Space probes send back to Earth more and more data, which are then processed and on their basis different kinds of cartographic products are created, such as hypsometric, topographic and albedo maps, virtual globes, spatial databases, terrain models etc.

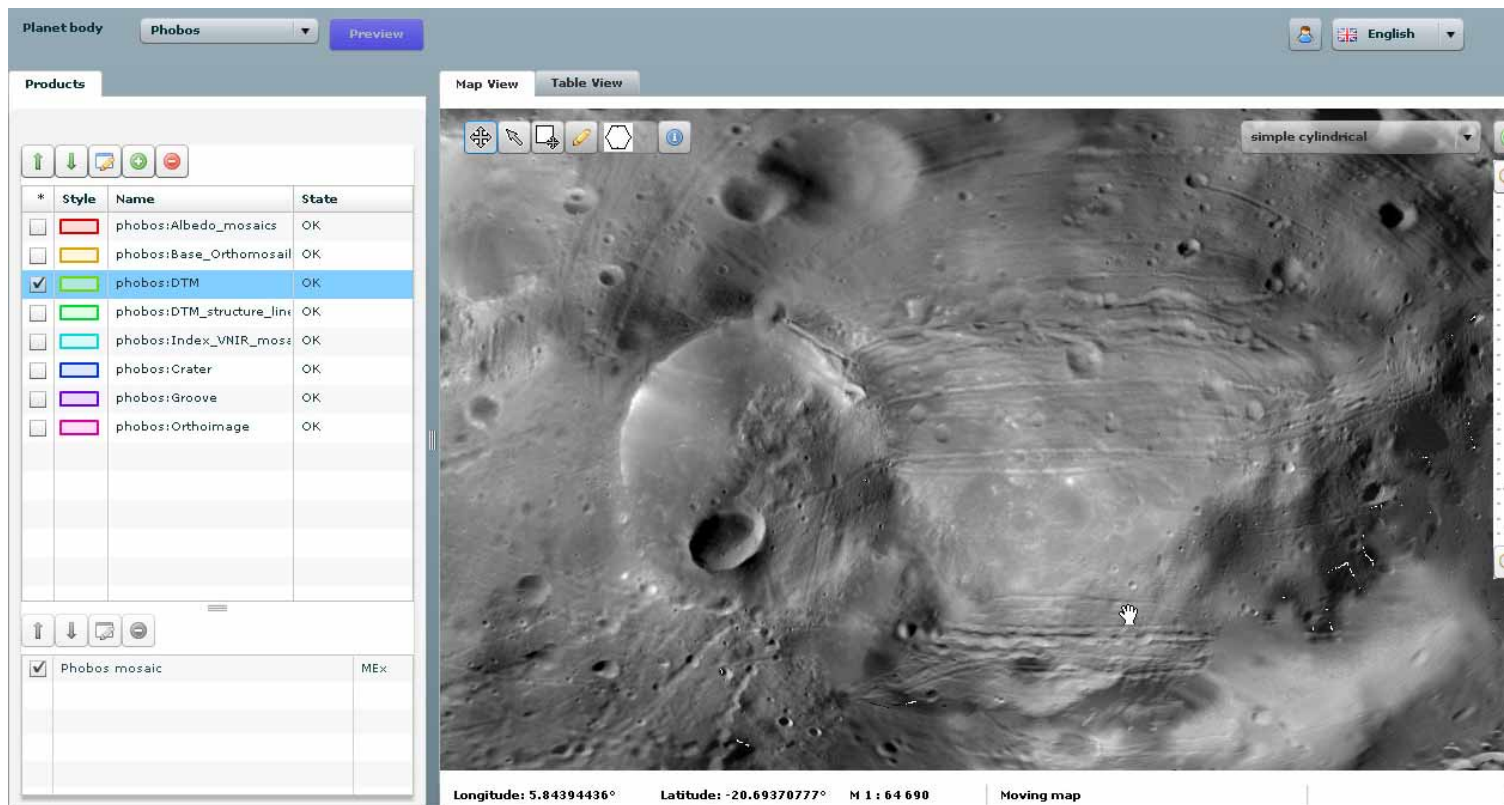
In the case of solar system planets such as Venus, Mars, and the larger moons of the outer planets, typical map contains most often information about the terrain and the mutual spatial relations and the shape of characteristic forms of terrain (e.g. craters, plains, mountain ranges). The ellipsoid of rotation is usually taken as reference surface for these celestial bodies, because they are so massive that their own gravity forces get them close to a spherical shape.

However, in the solar system there is a significant number of so-called small celestial bodies with a diameter of up to several hundred kilometers (mainly asteroids and comets) whose shape is irregular. The impulse for the development of this kind of mapping is to obtain more accurate data source related to their surface. Particular attention should be paid to the satellites of Mars: Phobos and Deimos. The mapping of these objects requires the use of unconventional solutions in the selection of the reference surface and map projections.

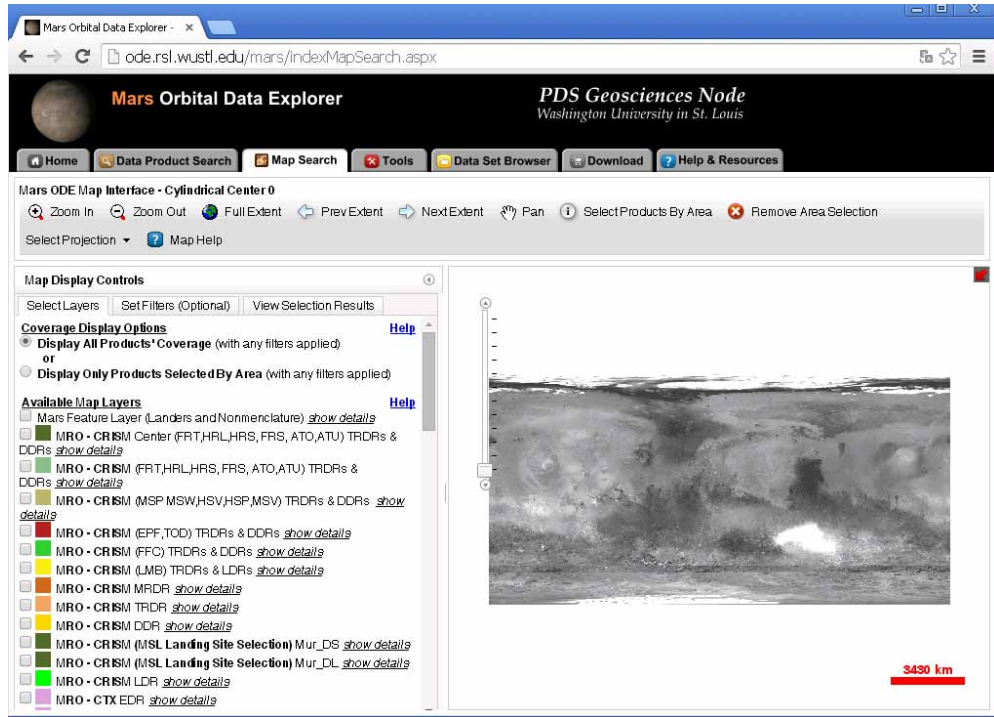
The authors presented the basic problems of modern planetary cartography. They broadly described the problem of the use of map projections of irregular objects. They present basic types of map projections, their characteristics, as well as sample maps.

dr hab. Paweł Pędzich, prof. PW
p.pedzich@gik.pw.edu.pl

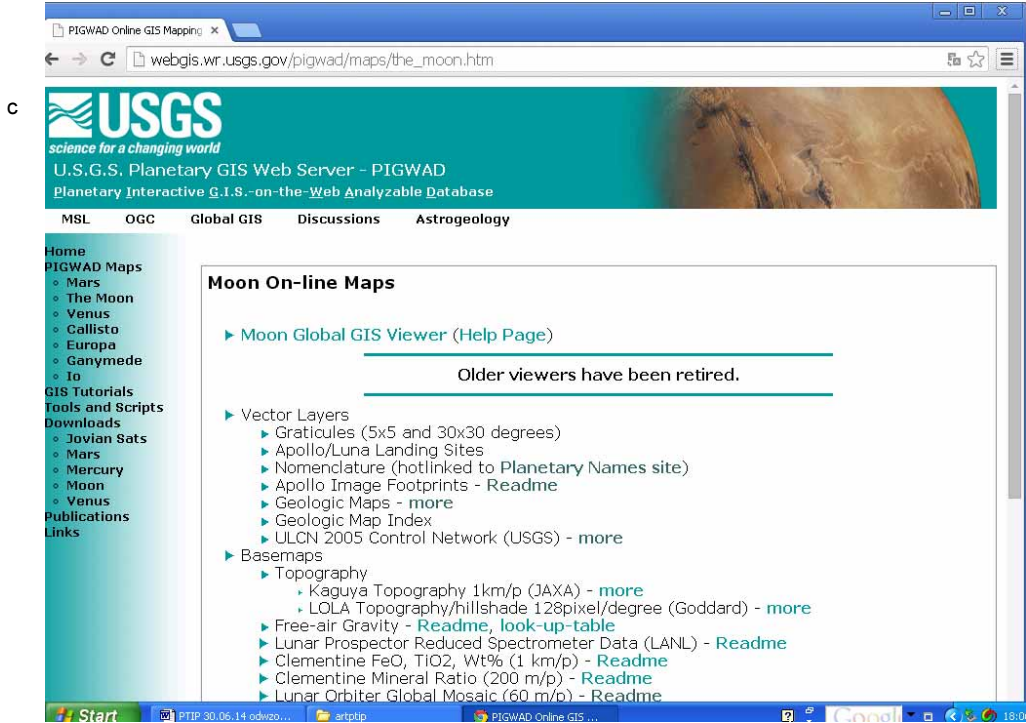
mgr inż. Kamil Jan Latuszek
kamil.latuszek@wp.pl



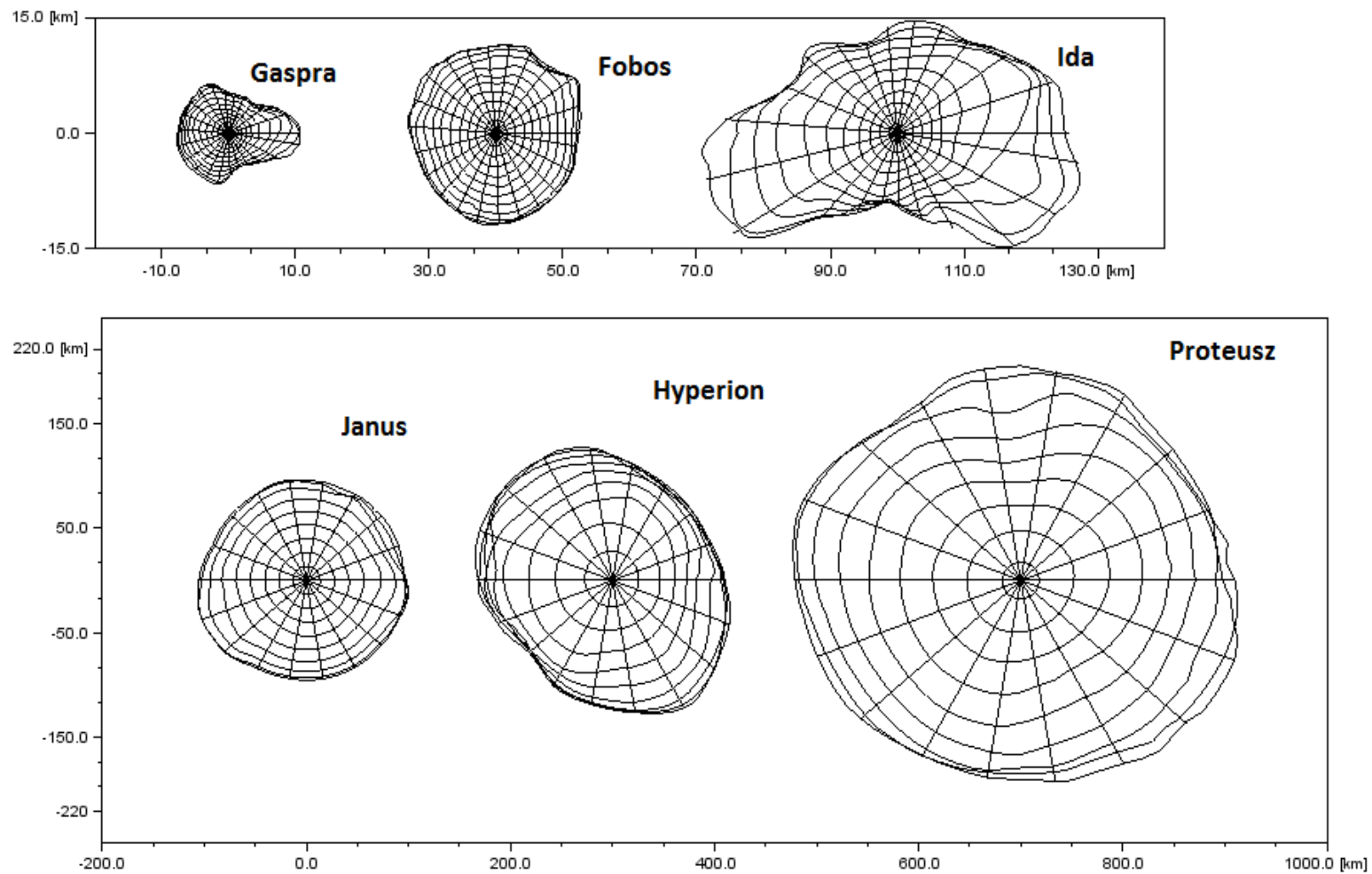
Rysunek 1. Zobrazowanie powierzchni Fobosa będące częścią GIS-u opracowanego w Laboratorium MexLAB w MIGAİK
(źródło: <http://cartsrv.mexlab.ru/geoportal/>)



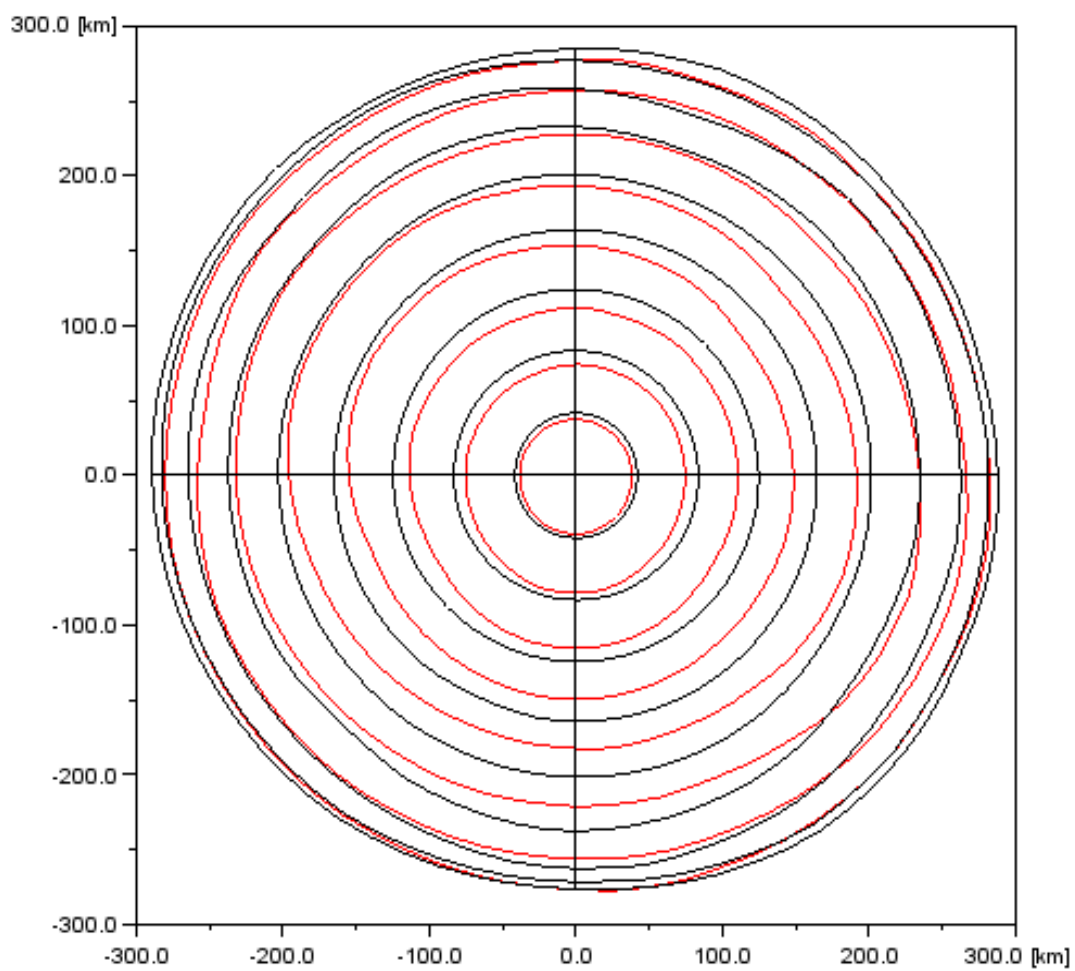
Rysunek 2. Przykładowe dane Systemu Danych Planetarnych NASA (źródło: <http://pds.jpl.nasa.gov/>)



Rysunek 3. PIGWAD system udostępniający dane planetarne (źródło: <http://webgis.wr.usgs.gov/index.html>)



Rysunek 4. Rzuty ortograficzne siatek planetocentrycznych powierzchni fizycznych wybranych ciał niebieskich nie będących w stanie równowagi hydrostatycznej (źródło: opracowanie własne na podstawie danych na stronie <http://sbn.psi.edu/pds/asteroid>)



Rysunek 5. Rzuty ortograficzne półkuli północnej (kolor czarny) oraz południowej (kolor czerwony) Westy.
Opracowanie własne na podstawie danych na stronie <http://sbn.psi.edu/pds/asteroid>