

**ANALIZA WPŁYWU REDUKCJI ODWZOROWAWCZYCH
NA WARTOŚĆ WYZNACZANYCH
PÓL POWIERZCHNI WIELOBOKÓW
W ODWZOROWANIACH RÓWNOPOŁOWYCH**

**ANALYSIS OF INFLUENCE OF AREA REDUCTIONS
ON VALUES OF CALCULATED AREAS OF POLYGONS
IN EQUAL-AREA MAP PROJECTIONS**

Paweł Pędzich¹, Marta Kuźma²

¹Zakład Kartografii, Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska

²Zakład Geodezji, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji, Wojskowa Akademia Techniczna

Słowa kluczowe: odwzorowania równopolowe, redukcje odwzorowawcze pól, wieloboki geodezyjne
Keywords: equal-area map projections, area reductions, geodetic polygons

Wstęp

W artykule pt. „Badanie zniekształceń oraz ich wpływu na wartość wyznaczanych pól wieloboków w wybranych odwzorowaniach równopolowych” opublikowanym w Rocznikach Geomatyki w 2010 r. (Pędzich, Kuźma, 2010) wykazano, że stosując różne odwzorowania równopolowe, można uzyskać znaczne różnice pomiędzy polami powierzchni wieloboków, opartych na tych samych wierzchołkach. Różnice wynikają stąd, że odpowiednikiem topologicznym odcinka linii prostej, wyznaczonej w płaszczyźnie danego odwzorowania, jest na ogół pewien łuk krzywej w płaszczyźnie innego odwzorowania kartograficznego. Dlatego też, wykorzystując odwzorowania równopolowe do obliczania pól wieloboków, należy definiować te wieloboki w sposób jednoznaczny na powierzchni oryginału oraz określić w płaszczyźnie obrazu ich odpowiedniki topologiczne.

W pracach geodezyjnych i kartograficznych mamy do czynienia z wielobokami, których boki stanowią odcinki linii geodezyjnych. W odwzorowaniach kartograficznych obrazami linii geodezyjnych nie są linie proste, lecz pewne krzywe. Wykorzystując więc odwzorowania równopolowe do obliczania pól tych wieloboków, należy mieć świadomość, że pole powierzchni geodezyjnego wieloboku elipsoidalnego jest zachowane, ale jego odpowiednikiem obrazowym jest pewien wielobok krzywoliniowy. Chcąc uzyskać zgodność obliczonych pól powierzchni pomiędzy oryginałem a obrazem w odwzorowaniach kartograficznych równopolowych, należy obliczać w płaszczyźnie odwzorowania pole powierzchni krzy-

woliniowych wieloboków. Występuje więc konieczność uwzględniania redukcji pól powierzchni, wynikających z nieprostoliniowości obrazów linii geodezyjnych w odwzorowaniach kartograficznych.

W artykule przedstawione zostaną sposoby wyznaczania redukcji odwzorowawczych pól powierzchni oraz przeanalizowany zostanie ich wpływ na wartość pól powierzchni odpowiedników obrazowych wieloboków geodezyjnych.

Redukcje pól w odwzorowaniach równopółowych – definicje i wzory

Jeżeli na powierzchni oryginału w odwzorowaniu kartograficznym, wyznaczmy wielobok geodezyjny, to jego boki stanowią odcinki linii geodezyjnych. Ich obraz w płaszczyźnie odwzorowania, w ogólności nie będzie figurą geodezyjną, a wielobokiem krzywoliniowym, którego boki to łuki krzywych, a nie odcinki linii prostych. Każdej figurze geodezyjnej zdefiniowanej na powierzchni oryginału, możemy przyporządkować w płaszczyźnie obrazu figurę zwaną jej odpowiednikiem redukcyjnym. Odpowiednik redukcyjny jest zbudowany z odcinków linii prostych, łączących w płaszczyźnie odwzorowania, obrazy wierzchołków wieloboku.

Różnice lub ilorazy, zachodzące pomiędzy odpowiadającymi sobie parametrami metrycznymi figury geodezyjnej, zlokalizowanej na powierzchni oryginału i odpowiednika redukcyjnego tej figury na powierzchni obrazu, nazywamy redukcjami odwzorowawczymi geodezyjnymi. Redukcje odwzorowawcze geodezyjne dotyczą długości boków, kątów wewnętrznych lub azymutów boków, a także pól figur geodezyjnych.

Jeżeli przyjmiemy za powierzchnię oryginału w odwzorowaniu kartograficznym elipsoidę obrotową spłaszczoną o równaniu:

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \left[\frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right] \quad (1)$$

$$(B, L) \in \omega = \left\{ (B, L): B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), L \in]-\pi, \pi[\right\}$$

oraz obraz

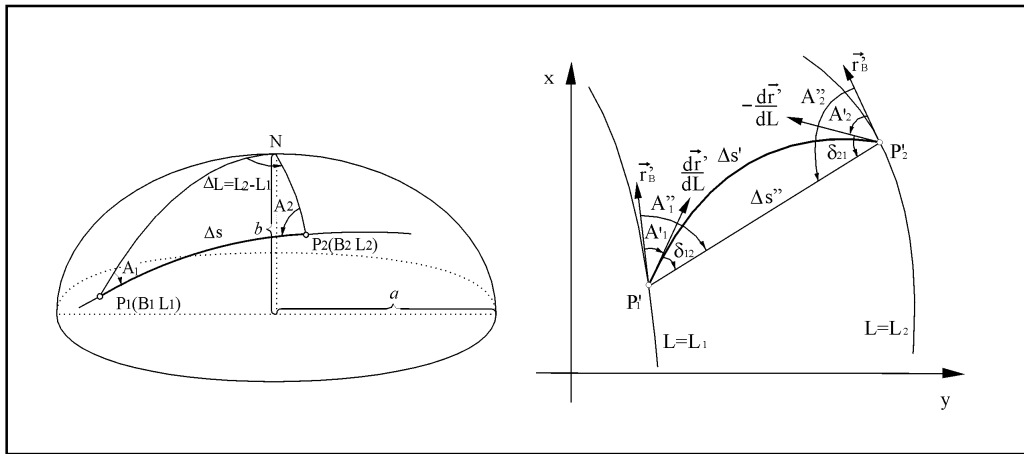
$$\vec{r}' = \vec{r}'(B, L) = [x = x(B, L), y = y(B, L)] \quad (2)$$

w płaszczyźnie $z = \text{const}$ i oznaczmy przez Δs długość odcinka linii geodezyjnej przechodzącej przez punkty P_1 i P_2 położone na powierzchni oryginału oraz przez A_1 azymut tej linii w punkcie P_1 , a przez A_2 azymut linii geodezyjnej w punkcie P_2 (rys. 1). W tak utworzonym odwzorowaniu kartograficznym obrazem odcinka linii geodezyjnej $P_1 P_2$, będzie odcinek krzywoliniowy $P_1' P_2'$ o długości $\Delta s'$, obrazem azymutu A_1 , będzie kąt skierowany A_1' zawarty

między wektorem \vec{r}_B' stycznym do obrazu południka w punkcie P_1 , a wektorem $\frac{d\vec{r}'}{dL}$ stycznym do obrazu linii geodezyjnej w tym punkcie. Z drugiej strony obrazem azymutu A_2 , będzie kąt skierowany A_2' , liczony ze znakiem przeciwnym, zawarty pomiędzy wektorem

\vec{r}_B' stycznym do obrazu południka w punkcie P_2' , a wektorem $\frac{d\vec{r}'}{dL}$ stycznym do obrazu linii geodezyjnej w tym punkcie, jak to pokazano na rysunku.

Odpowiednikiem zredukowanym linii geodezyjnej P_1P_2 będzie odcinek linii prostej o długości $\Delta s''$, łączącej punkty P_1' i P_2' , odpowiednikiem zredukowanym kąta kierunkowego A_1 będzie kąt skierowany A_2'' zawarty pomiędzy wektorem stycznym \vec{r}_B' do obrazu południka w punkcie P_1' a odcinkiem; natomiast odpowiednikiem zredukowanym kąta kierunkowego A_2 , będzie kąt skierowany A_2'' zawarty pomiędzy wektorem stycznym do obrazu południka \vec{r}_B' w punkcie P_2' , a odcinkiem $P_1'P_2'$. Kąty $\delta_{12} = A_1'' - A_1'$, $\delta_{21} = A_2'' - A_2'$ noszą nazwę kątów redukcyjnych (rysunek).



Rys. Ilustracja odpowiedników topologicznych i redukcyjnych linii geodezyjnej

Redukcja odwzorowawcza pola $\Delta'F$ zawartego pomiędzy obrazem łuku linii geodezyjnej a cięciwą $P_1' P_2'$ wyraża się wzorem:

$$\Delta'F = \frac{\Delta s''^2}{4} \left(\frac{\delta - 0.5 \sin 2\delta}{\sin^2 \delta} \right) \quad (3)$$

gdzie $\Delta s''$ – długość cięciwy $P_1' P_2'$ oraz $\delta = 0,5(\delta_{12} + \delta_{21})$.

Zależność (3) jest wzorem przybliżonym wynikającym z aproksymacji obrazu linii geodezyjnej łukiem okręgu. Ma on zastosowanie dla krótkich długości linii geodezyjnych.

Kąty redukcyjne δ_{12} oraz δ_{21} obliczamy jako różnicę odpowiedników redukcyjnych i obrazowych odpowiednich kierunków

$$\delta_{12} = A_1'' - A_1' \quad \text{oraz} \quad \delta_{21} = A_2'' - A_2' \quad (4)$$

Odpowiedniki topologiczne azymutów A_1, A_2 obliczamy z ich definicji:

$$A'_1 = \angle \left(\vec{r}'_\varphi, \frac{d\vec{r}'}{dL} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}} \quad A'_2 = \angle \left(\vec{r}'_\varphi, -\frac{d\vec{r}'}{dL} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (5)$$

gdzie: $\frac{d\vec{r}'}{dL} = \vec{r}'_B \frac{dB}{dL} + \vec{r}'_L$

tzn. z wzorów:

$$\tan A'_1 = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \frac{d\vec{r}'}{dL} \right| \operatorname{sgn} \Delta L}{\vec{r}'_B \cdot \frac{d\vec{r}'}{dL}} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}} \quad \tan A'_2 = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \frac{d\vec{r}'}{dL} \right| \operatorname{sgn}(-\Delta L)}{\vec{r}'_B \cdot \frac{d\vec{r}'}{dL}} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (6)$$

i analogicznie ich odpowiedniki redukcyjne z wzorów:

$$\tan A''_1 = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \Delta \vec{s}'' \right| \operatorname{sgn} \Delta L}{\vec{r}'_B \cdot \Delta \vec{s}''} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}} \quad \tan A''_2 = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \Delta \vec{s}'' \right| \operatorname{sgn}(-\Delta L)}{\vec{r}'_B \cdot \Delta \vec{s}''} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (7)$$

Pochodną dB/dL obliczamy następująco:

$$\frac{dB}{dL} = \frac{H \cot A - F}{E} = \frac{MN \cos B \cot A}{M^2} = \frac{N \cos B \cot A}{M} \quad (8)$$

Analiza uzyskanych wyników obliczeń wartości pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach równopółowych z uwzględnieniem redukcji pól

Uwzględnienie redukcji pola określonego równaniem (3) daje możliwość dokładnego obliczenia pól powierzchni wieloboków geodezyjnych. W tabeli 1 i 2 przedstawiono wyniki obliczeń pól powierzchni przykładowych wieloboków przed i po uwzględnieniu redukcji odwzorowawczych. Obliczenia wykonano na tych samych danych co w artykule opublikowanym w 2010 r. (Pędzich, Kuźma, 2010). Wieloboki utworzono w oparciu o współrzędne punktów leżących na granicy Polski. Obliczenia wykonano dla 5 wieloboków, w których średnie odległości pomiędzy wierzchołkami wyniosły odpowiednio 9 km (max 47 km), 2 km (max 12 km), 1 km (max 6 km), 0,5 km (max 3 km) i 0,3 km (max 1,5 km). W tabeli 1 zamieszczono wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach równopółowych.

Wykonano również obliczenia dla wieloboku utworzonego w oparciu o współrzędne punktów leżących na granicy województwa mazowieckiego. Średnie odległości pomiędzy punktami wyniosły 0,5 km (maksymalne 4,5 km). W tabeli 2 zamieszczono wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboku w wybranych odwzorowaniach równopółowych.

Uzyskane wyniki wykazują dużą zgodność pomiędzy obliczonymi polami powierzchni, po uwzględnieniu redukcji odwzorowawczych. W przypadku wieloboku oznaczonego Pole (tab. 1), gdy odległości pomiędzy wierzchołkami dochodziły do 47 km, różnice pomiędzy polami powierzchni obliczonymi w różnych odwzorowaniach kartograficznych przed uwzględ-

Tabela 1. Wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach kartograficznych Polski przed i po uwzględnieniu redukcji pól

Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole 1 bez redukcji [m ²]	Pole 1 po uwzględnieniu redukcji [m ²]	Pole 2 bez redukcji [m ²]	Pole 2 po uwzględnieniu redukcji [m ²]
Walcowe	70 m/km	312 554 066 331	312 556 251 772	312 556 115 161	312 556 251 752
Azymutalne	67 m/km	312 557 210 821	312 556 251 778	312 556 311 694	312 556 251 752
Sansona	35 m/km	312 550 778 174	312 556 251 708	312 555 909 656	312 556 251 752
Bonne'a	1 m/km	312 555 647 854	312 556 251 803	312 556 214 009	312 556 251 754
Eulera	60 cm/km	312 555 691 970	312 556 252 056	312 556 216 766	312 556 251 770
Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole 3 bez redukcji [m ²]	Pole 3 po uwzględnieniu redukcji [m ²]	Pole 4 bez redukcji [m ²]	Pole 4 po uwzględnieniu redukcji [m ²]
Walcowe	70 m/km	312 556 217 604	312 556 251 751,8	312 556 243 215	312 556 251 751,8
Azymutalne	67 m/km	312 556 266 737	312 556 251 751,8	312 556 255 498	312 556 251 751,9
Sansona	35 m/km	312 556 166 228	312 556 251 751,7	312 556 230 371	312 556 251 751,9
Bonne'a	1 m/km	312 556 242 316	312 556 251 752,3	312 556 249 393	312 556 251 752,0
Eulera	60 cm/km	312 556 243 005	312 556 251 756,3	312 556 249 565	312 556 251 753,0
Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole 5 bez redukcji [m ²]	Pole 5 po uwzględnieniu redukcji [m ²]		
Walcowe	70 m/km	312 556 249 618	312 556 251 752,4		
Azymutalne	67 m/km	312 556 249 618	312 556 251 752,4		
Sansona	35 m/km	312 556 246 407	312 556 251 752,4		
Bonne'a	1 m/km	312 556 246 407	312 556 251 752,4		
Eulera	60 cm/km	312 556 251 206	312 556 251 752,7		

nieniem redukcji, dochodzą do kilku kilometrów kwadratowych. Natomiast po uwzględnieniu redukcji są znacznie mniejsze, wynoszą kilkaset metrów kwadratowych. Wraz ze zmniejszaniem odległości między punktami uzyskujemy wyższą zgodność wyników. Dla wieloboku oznaczonego Pole 5 przed uwzględnieniem redukcji, różnice są rzędu kilku tysięcy metrów kwadratowych, po uwzględnieniu redukcji poniżej metra kwadratowego. Użytko więc dużą zgodność wyników pomiędzy różnymi odwzorowaniami kartograficznymi. Podobne wyniki uzyskano w przypadku województwa mazowieckiego (tab. 2).

Analizując wyniki przed uwzględnieniem redukcji, można zauważyć, że im występują mniejsze zniekształcenia długości, tym różnice pomie-

Tabela 2. Wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach kartograficznych województwa mazowieckiego przed i po uwzględnieniu redukcji pól

Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole bez redukcji [m ²]	Pole po uwzględnieniu redukcji [m ²]
Walcowe	70 m/km	35 586 539 638	35 586 535 046,0
Azymutalne	57 m/km	35 586 533 833	35 586 535 045,0
Sansona	14 m/km	35 586 536 254	35 586 535 046,0
Bonne'a	10 cm/km	35 586 534 858	35 586 535 047,9
Eulera	10 cm/km	35 586 534 880	35 586 535 045,5

dzy obliczonymi polami są mniejsze. Uzyskiwane rozbieżności również są mniejsze gdy odległości pomiędzy wierzchołkami są mniejsze. Z analizy uzyskanych wyników po uwzględnieniu redukcji odwzorowawczych wynikają wnioski:

1. Niezależnie od wielkości zniekształceń długości, otrzymujemy podobne różnice pomiędzy obliczonymi wartościami pól powierzchni.

2. Większe odległości pomiędzy punktami powodują nieco większe rozbieżności.

Wniosek 2 wynika z niedoskonałości zastosowanego algorytmu obliczania redukcji odwzorowawczych, opartego na aproksymacji obrazu linii geodezyjnej łukiem okręgu. Przybliżenie to daje pozytywne rezultaty dla niewielkich odległości między punktami, a dla dużych odległości wzrastają rozbieżności pomiędzy obliczonymi powierzchniami pól.

Do obliczenia redukcji pola, w przypadku dużych odległości między punktami, należy zastosować inne metody, np. oparte o całkowanie numeryczne, metodę Simpsona. Wyznaczamy wówczas współrzędne prostokątne płaskie punktów równomiernego podziału odcinka obrazu linii geodezyjnej P_0P_n . Mając dane współrzędne prostokątne końców odcinka (x_0, y_0) oraz (x_n, y_n) dokonujemy transformacji współrzędnych punktów podziału odcinka linii geodezyjnej do układu lokalnego $x'oy'$, którego początkiem jest punkt P_0 oraz punkty P_0 oraz P_n wyznaczają kierunek osi y' nowego układu.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \quad (4)$$

Następnie obliczamy pole $\Delta F'$ stosując formułę całkową Simpsona

$$\Delta F' = \frac{h}{3} [x'_0 + 4(x'_1 + x'_3 + x'_5 + \dots + x'_{n-1}) + 2(x'_2 + x'_4 + x'_6 + \dots + x'_{n-2}) + x'_n] \quad (5)$$

gdzie: $h = \frac{y'_n - y'_0}{n}$

Obliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich punktów leżących na obrazie odcinka linii geodezyjnej realizujemy w następujących 2 etapach:

1. Korzystając z metod przenoszenia współrzędnych wzdłuż linii geodezyjnej na elipsoidzie obliczamy współrzędne punktów równomiernego podziału tego odcinka,

2. Obliczamy współrzędne obrazów tych punktów w płaszczyźnie odwzorowania równopolewego.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono pewne aspekty prowadzonych prac badawczych nad opracowaniem metodyki obliczania pól powierzchni elipsoidalnych wieloboków geodezyjnych, z zastosowaniem odwzorowań kartograficznych równopolewych. Artykuł stanowi kontynuację opublikowanych w 2010 r. wyników badań z tego zakresu. W artykule zajęto się problemem redukcji pól powierzchni w odwzorowaniach równopolewych. Pokazano, że do uzyskania dużej dokładności wyników niezbędne jest stosowanie redukcji pól powierzchni.

Literatura

Pędzich P., Kuźma M., 2010: Badanie zniekształceń oraz ich wpływu na wartość wyznaczanych pól wieloboków w wybranych odwzorowaniach równopolewowych, *Roczniki Geomatyki* t.VIII z. 5(41), 95-104, PTIP, Warszawa.

Abstract

The paper deals with the problems of area reduction determination in equal-area map projections. It was demonstrated that in order to obtain high compliances between areas of polygons calculated in various map projections it is necessary to take into account the influence of area reduction.

In the paper, definitions of topology and image equivalents of geodetic line and definition of area reduction are presented. Algorithms of calculation of area reductions for short and long distances of geodetic lines are described. In the case of short distance, the suggested algorithm is based on approximation of the image of a geodetic line by arc of circle and then the area between the arc and chord is calculated. In the case of long distance, the suggested algorithm is based on numerical methods of integration. In both cases, knowledge of methods to transfer geodetic coordinates on ellipsoid are needed.

Basing on prepared computer programs, the appropriate tests were made. 6 polygons were selected. 5 of them consisted of points located on the border of Poland and one consisted of points located on boundary of Mazovia region. The areas were calculated in 5 map projections in two ways: taking into consideration the area reductions and without them.

After analyzing results obtained before area reduction was taken into consideration it was easy to notice that when distortion were smaller the differences between areas were smaller too. Also, smaller distances between points caused smaller differences. After consideration of area reductions, the differences between calculated areas were generally smaller than before reductions, irrespective of distortions. It is obvious that the higher compliance of results was obtained when the distance between points was decreased. Application of the algorithm for calculation of projection reductions, based on approximation of the image of the geodetic line by the circular arc produced good results for small distances between points; thus, differences between calculated areas were bigger for longer distances. In the case of long distances between points, other methods should be used for calculation of reduction of areas, based on numerical integration.

dr hab. inż. Paweł Pędzich, prof. PW
p.pedzich@gik.pw.edu.pl

mgr inż. Marta Kuźma
mkuzma@vp.pl