POLSKIE TOWARZYSTWO INFORMACJI PRZESTRZENNEJ
ROCZNIKI GEOMATYKI 2009 ❍ TOM VII ❍ ZESZYT 4(34)

APROKSYMACJA JEDNOSTAJNA ODWZOROWAŃ KARTOGRAFICZNYCH

UNIFORM APPROXIMATION OF MAP PROJECTIONS

Paweł Pędzich

Zakład Kartografii, Wydział Geodezji i Kartografii, Politecnika Warszawska

Słowa kluczowe: odwzorowania kartograficzne, aproksymacje, wielomiany Czebyszewa
Keywords: map projections, approximations, Chebyshev polynomials

Wstęp

Zwykle do aproksymacji odwzorowań kartograficznych wykorzystuje się metodę najmniejszych kwadratów. Wyznaczenie współczynników wielomianów aproksymacyjnych wymaga wówczas rozwiązywania skomplikowanych układów równań. Zastosowanie ortogonalnych wielomianów Czebyszewa pozwala na uniknięcie tych problemów.

Aproksymację wielomianami Czebyszewa określa się mianem aproksymacji jednostajnej. Polega ona na przybliżeniu funkcji $f(x)$ wielomianem $T_n(x)$ w przedziale x ε ⟨a, b⟩, w taki sposób aby największy co do wartości bezwzględnej błąd

$$E = \max_{x \in \langle a,b \rangle} \left| f(x) - T_n(x) \right| \tag{1}$$

przy odpowiednim wyborze współczynników wielomianu $T_n(x)$ był możliwie jak najmniejszy.

Jest to więc nieco inne podejście do aproksymacji niż w przypadku metody najmniejszych kwadratów.

W artykule zaprezentowane zostaną własności wielomianów Czebyszewa oraz ich zastosowanie do aproksymacji odwzorowań kartograficznych. Ponadto przedstawione zostanie porównanie wyników aproksymacji jednostajnej oraz aproksymacji średniokwadratowej odwzorowań kartograficznych.

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju stopnia n można zapisać w następującej postaci (Paszkowski, 1975)

$$\begin{aligned} &T_0 = 1 \\ &T_1 = x \\ &T_2 = 2x^2 - 1 \\ &T_j = 2xT_{n-1} - T_{n-2} \end{aligned} \tag{2}$$

Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju mają następującą postać

$$\begin{aligned} &U_0 = 1 \\ &U_1 = 2x \\ &U_2 = 4x^2 - 1 \\ &U_n = 2xU_{n-1} - U_{n-2} \end{aligned} \tag{3}$$

Własności wielomianów Czebyszewa

Wielomian $T_n(x)$ posiada n zer w przedziale $\langle -1,1 \rangle$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad \mathrm{k} = 0,1,...\mathrm{n}\text{-}1 \tag{4}$$

i n+1 ekstremów w tymże przedziale

$$x'_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad \mathrm{k} = 0,1,...\mathrm{n} \tag{5}$$

Wielomiany (2) są ortogonalne w przypadku ciągłym z iloczynem skalarnym

$$\left(T_i, T_j\right) = \int_{-1}^{1} T_i(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{6}$$

przy czym

$$\left(T_i, T_j\right) = \begin{cases} 0 \quad dla \ i \neq j \\ \dfrac{\pi}{2} \quad dla \ \ i = j \neq 0 \\ \pi \quad dla \ \ i = j = 0 \end{cases} \tag{7}$$

natomiast w przypadku dyskretnym z iloczynem skalarnym

$$\left(T_i, T_j\right) = \sum_{k=0}^{m} T_i\left(x_k\right) T_j\left(x_k\right), \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{m+1}\frac{\pi}{2}\right) \tag{8}$$

gdzie x_k są zerami wielomianu T_{m+1}(x), przy czym

$$\left(T_i, T_j\right) = \begin{cases} 0 \quad dla \ i \neq j \\ \dfrac{1}{2}(m+1) \quad dla \ \ i = j \neq 0 \\ m+1 \quad dla \ \ i = j = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Jeżeli wprowadzimy zmienną t przebiegającą przedział $\langle a, b \rangle$, wówczas stosujemy podstawienie

$$t = 0.5(a + b) + 0.5(b - a)x \tag{10}$$

Pochodną wielomianu Czebyszewa T_n obliczamy na podstawie zależności

$$T_n' = nU_{n-1} \tag{11}$$

Zasada tzw. minimaksu mówi, że ze wszystkich wielomianów n-tego stopnia ze współczynnikiem wiodącym równym 1 najmniejszą normę maksymalną w przedziale $\langle 1,1 \rangle$ ma wielomian $2^{1-n}T_n$

Szereg Czebyszewa jednej i dwóch zmiennych

Funkcję $f(x)$ można aproksymować szeregiem Czebyszewa w postaci (Björck, Dahlquist, 1987)

$$f(x)_m \approx \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j T_j \tag{12}$$

W przypadku dyskretnym współczynniki szeregu obliczamy z wzorów:

$$c_j = \frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f(x_k)T_j(x_k) \tag{13}$$

Funkcję $F(x,y)$ można przybliżać za pomocą szeregu Czebyszewa w postaci (Leng, 1997)

$$F(x,y) \approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}T_i(x)T_j(y) \tag{14}$$

Współczynniki szeregu (14) obliczamy za pomocą wzoru

$$c_{ij} = \frac{\varepsilon}{(n+1)(m+1)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} F(x_k, y_l)\cos\left(\frac{i(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)\cos\left(\frac{j(2l+1)\pi}{2(n+1)}\right) \tag{15}$$

gdzie ε=4 dla $i \neq 0$ i $j \neq 0$, ε=2 dla i=0 i $j \neq 0$ lub $i \neq 0$ i j=0 oraz ε=1 dla i=0 i j=0. Wzory (12)–(15) mają zastosowanie w przypadku nierównomiernie rozłożonych punktów węzłowych.

W praktyce mamy często do czynienia z takimi przypadkami, że posiadamy w rozważanym przedziale punkty równomiernie rozmieszczone oraz obliczone wartości funkcji w tych punktach. Można wówczas zastosować podejście przedstawione przez Lenga (1997).

W przypadku jednej zmiennej, jeśli węzeł x_k leży pomiędzy punktami x_a, x_b, w których określono wartości funkcji f_a, f_b wówczas interpolowaną wartość $f(x_k)$ można obliczyć z wzoru

$$f(x_k) = wf_a + (1-w)f_b \tag{16}$$

gdzie

$$w = 0.5 - 1/[(x_b - x_a)(x_k - 0.5(x_a - x_b))] \tag{17}$$

Natomiast w przypadku dwóch zmiennych *(x, y)* wartość funkcji w węźle obliczamy w następujący sposób: jeśli węzeł (x_k, y_k) leży wewnątrz prostokąta określonego przez punkty x_a, x_b oraz y_c, y_d, w których pomierzono wartości f_a, f_b, f_c, f_d wówczas do obliczenia wartości funkcji *f(x, y)* w węźle możemy zastosować wzór

$$\begin{aligned} f(x_k, y_k) &= 0.25(f_a + f_b + f_c + f_d) + \\ &+0.5(f_d - f_c + f_b - f_a)/(x_b - x_a)\ (x_k - 0.5(x_a + x_b)) + \\ &+0.5(f_d - f_b + f_c - f_a)/(y_b - y_a)\ (x_k - 0.5(y_a + y_b)) \end{aligned} \tag{18}$$

Zastosowanie wielomianów Czebyszewa do aproksymacji odwzorowań kartograficznych

Procedura zastosowania wielomianów Czebyszewa do aproksymacji odwzorowań kartograficznych przedstawiona zostanie na prostym przykładzie odwzorowania azymutalnego równokątnego o postaci

$$\begin{aligned} x &= R\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\lambda \\ y &= R\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\lambda \end{aligned} \tag{19}$$

w którym parametry φ, λ oznaczają współrzędne geograficzne na sferze o promieniu R.

Skalę długości w tym odwzorowaniu przedstawia wzór

$$m = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \tag{20}$$

Funkcję (20) aproksymowano w przedziale $\varphi \in \langle 48^o, 54^o \rangle$ obejmującym obszar Polski szeregiem Czebyszewa w postaci

$$m_p \approx \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j T_j \tag{21}$$

Współczynniki szeregu (21) wyznaczono tak, aby największy co do wartości bezwzględnej błąd był mniejszy niż $1*10^{-9}$. Warunek ten jest spełniony dla szeregu 6 stopnia o współczynnikach

c_0	0.66942056584	c_4	0.00000442051
c_1	0.03870692874	c_5	0.00000019863
c_2	0.00198673489	c_6	0.00000000837
c_3	0.00009564569		

Wartości skali obliczone w punktach równoodległych za pomocą ścisłego wzoru (20) oraz szeregu (21) zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1

φ	m	m_p	$m-m_p$
48°	3.89324451749	3.89324451714	3.5E-10
49°	4.07680006789	4.07680006756	3.3E-10
50°	4.27431608521	4.27431608554	-3.3E-10
51°	4.48724199273	4.48724199235	3.8E-10
52°	4.71722041101	4.71722041135	-3.4E-10
53°	4.96611890326	4.96611890290	3.6E-10
54°	5.23606797750	5.23606797789	-3.9E-10

Odwzorowanie (19) aproksymowano za pomocą szeregów

$$x \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} T_i(\varphi) T_j(\lambda) \tag{22}$$

$$y \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c'_{ij} \, T_i(\varphi) T_j(\lambda) \tag{23}$$

Przyjmując dokładność rzędu 0.1 m dla współrzędnej x uzyskano następujące współczynniki c_{ij} wielomianu stopnia 5

c_{ij}	i=0	1	2	3	4	5
j=0	17171.8435979	-520.331358448	-39.6190969591	0.19989368391	0.00760811149	-0.000023030137
1	1430.42159388	-43.3438149406	-3.30028697834	0.01665122561	0.00063375880	-0.00000191842
2	52.9630401760	-1.60485567465	-0.12219700302	0.00061653119	0.00002346566	-0.00000007103
3	2.04262039083	-0.06189431185	-0.00471275987	0.00002377770	0.00000090499	-0.00000000274
4	0.07865136626	-0.00238324860	-0.00018146544	0.00000091556	0.00000003485	-0.00000000011
5	0.00302511847	-0.00009166540	-0.00000697959	0.00000003521	0.00000000134	-0.000000000004

W tabeli 2 zamieszczono wartości współrzędnych obliczonych z wzoru (20), szeregu (21) oraz różnice pomiędzy nimi.

Tabela 2

φ [°]	λ [°]	x [km]	x_p [km]	$x-x_p$ [km]
48	14	16104.0199	16104.0198	0.0001
52	14	17953.1174	17953.1174	0.0000
54	14	19025.4827	19025.4826	-0.0001
48	18	15784.7063	15784.7062	0.0001
52	18	17597.1396	17597.1395	0.0001
54	18	18648.2418	18648.2417	0.0001
48	22	15388.4912	15388.4911	0.0001
52	22	17155.4302	17155.4302	0.0000
54	22	18180.1485	18180.1484	0.0001

W przypadku aproksymacji funkcji y uzyskano następujące współczynniki c'_{ij}

c'_{ij}	i=0	1	2	3	4	5
j=0	5414.26148924	1650.28023196	-12.4918532876	-0.63398176893	0.00239882834	0.00007304224
1	451.010196137	137.469018180	-1.04057648722	-0.05281094061	0.00019982338	0.00000608445
2	16.6991824228	5.08995191626	-0.03852856706	-0.00195538713	0.00000739870	0.00000022528
3	0.64403573537	0.19630367777	-0.00148592748	-0.00007541322	0.00000028534	0.00000000869
4	0.02479868052	0.00755869888	-0.00005721583	-0.00000290380	0.00000001099	0.00000000033
5	0.00095381619	0.00029072552	-0.00000220066	-0.00000011169	0.00000000042	0.00000000001

W tabeli 3 zamieszczono wartości współrzędnych obliczonych z wzoru (20), szeregu (21) oraz różnice pomiędzy nimi.

Tabela 3

φ [°]	λ [°]	y [km]	y_p [km]	$y-y_p$ [km]
48	14	4015.1831	4015.1831	0.0000
52	14	4476.2149	4476.2149	0.0000
54	14	4743.5856	4743.5856	0.0000
48	18	5128.7620	5128.7620	0.0000
52	18	5717.6572	5717.6572	0.0000
54	18	6059.1811	6059.1810	0.0001
48	22	6217.3540	6217.3540	0.0000
52	22	6931.2437	6931.2437	0.0000
54	22	7345.2568	7345.2567	0.0001

W przypadku zastosowania aproksymacji odwzorowania kartograficznego (19) szeregiem Czebyszewa (22), (23) zniekształcenia odwzorowawcze wyznaczamy obliczając pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} x_\varphi &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} i c_{ij} U_{i-1}(\varphi) T_j(\lambda) \\ y_\varphi &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} i c'_{ij} U_{i-1}(\varphi) T_j(\lambda) \\ x_\lambda &\approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, j T_i(\varphi) U_{j-1}(\lambda) \\ y_\lambda &\approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} c'_{ij}\, j T_i(\varphi) U_{j-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{24}$$

Pochodne (24) stanowią podstawę do obliczenia wartości zniekształceń długości, pól i kątów.

Porównanie wyników uzyskanych w aproksymacji jednostajnej i średniokwadratowej

Uzyskane wyniki aproksymacji jednostajnej porównano z wynikami aproksymacji średniokwadratowej. Do aproksymacji średniokwadratowej zastosowano wielomiany ortogonalne. Funkcję *f(x)* aproksymowano szeregiem

$$f(x) \approx y_m = \sum_{j=0}^{m} b_j^{(m)} p_j(x) \tag{25}$$

gdzie

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{j} a_{kj} x_i^k \tag{26}$$

jest wielomianem potęgowym ortogonalnym. Wielomiany te można wyznaczyć za pomocą związku rekurencyjnego (Ralston, 1971)

$$p_{j+1}(x) = (x-a_{j+1})\, \mathrm{p_j}(\mathrm{x}) - \beta_j\, p_{j-1}(x), \quad (j = 0,1,...), \tag{27}$$

gdzie

$$p_0(x) = 1, \quad p_{-1}(x) = 0$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_k^2(x_i)} \tag{28}$$

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_{k-1}^2(x_i)} \tag{29}$$

$$b_k^{(m)} = \omega_k / d_{kk} \tag{30}$$

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i\, p_k(x_i) \tag{31}$$

$$d_{jk} = \sum_{i=1}^{n} p_k(x_i)\, p_j(x_i) \tag{32}$$

Opisaną powyżej metodę zastosowano do aproksymacji skali długości *m*

$$m_p \approx \sum_{j=0}^{m} b_j\, p_j(\varphi) \tag{33}$$

Najlepsze przybliżenie uzyskano dla 6 stopnia wielomianu. Wyznaczono współczynniki o następujących wartościach

b_0	9.91084847676317E-0001
b_1	9.76487121105209E-0001
b_2	1.34430545555791E+0000
b_3	-2.01124868590491E-0001
b_4	1.45535915010413E+0000
b_5	-6.04275366658094E-0001
b_6	2.70713619766045E-0001

W tabeli 4 zamieszczono wartości skali m obliczonej za pomocą wzoru (20), skali m_p przybliżonej za pomocą wielomianu (33) oraz różnice wyznaczone w wybranych równoodległych punktach.

Tabela 4

φ	m	m_p	$m-m_p$
48°	3.89324451749	3.89324451657	9.2E-10
49°	4.07680006789	4.07680006820	-3.2E-10
50°	4.27431608521	4.27431608391	1.3E-09
51°	4.48724199273	4.48724199380	-1.1E-09
52°	4.71722041101	4.71722041149	-4.8E-10
53°	4.96611890326	4.96611890167	1.6E-09
54°	5.23606797750	5.23606797963	-2.1E-09

Porównując wyniki zamieszczone w tabeli 4 i w tabeli 1 widzimy, że aproksymacja szeregiem Czebyszewa daje lepsze rezultaty. Przy takim samym stopniu wielomianu uzyskujemy wyższą dokładność.

Odwzorowanie (19) aproksymowano szeregami w postaci

$$x \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \varphi^i \lambda^j \tag{34}$$

$$y \approx \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a'_{ij} \varphi^i \lambda^j \tag{35}$$

Współczynniki a_{ij}, a'_{ij} szeregu (34) i (35) wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Dla szeregu 5 stopnia określonego wzorem (34) uzyskano następujące współczynniki a_{ij}

a_{ij}	i=0	1	2	3	4	5
j=0	-34721.3392	77540.3985	-837314.2058	1587654.6307	-364403.5300	238694.1324
1	236292.5121	-9107.5071	1508652.1512	2.317668.1715	-17481214.6179	12100442.518
2	-570012.9261	-169335.9288	-1041044.0636	-15710381.4201	60604324.4373	-43707700.9780
3	777390.0566	-416647.4515	3615053.4093	13683419.4510	-67896738.9299	52999715.2076
4	-549098.8848	1008279.7727	-6100457.1573	2890163.0379	25231807.2411	-24177358.1999
5	161890.0986	-491128.5868	2846696.6897	-4775919.0116	-81783.5800	2539596.8107

W tabeli 5 zamieszczono wartości współrzędnej x_p obliczonej za pomocą szeregu (34) oraz błędy wyznaczone w wybranych równoodległych punktach.

α'_{ij}	i=0	1	2	3	4	5
j=0	-5551.5774	-24503.9660	17723.9481	-78562.1206	-154909.6266	295523.8492
1	38009.0608	139292.1304	-36954.9049	1255853.9791	-1965634.4540	1000471.6324
2	-103517.8703	-166440.3271	-376468.0774	-3617704.6852	9080180.2243	-7129674.9049
3	139541.9708	13066.0505	1278287.8342	3823382.8292	-13593018.8557	12301887.0255
4	-92924.3062	108548.5038	-1376931.8909	-1411392.7509	8550513.8820	-8677232.9696
5	24445.0981	-48282.9616	494538.7801	24253.2983	-1916367.8098	2208788.3584

Dla szeregu (35) 5 stopnia uzyskano następujące współczynniki a'_{ij}

W tabeli 6 zamieszczono wartości współrzędnych obliczonych z wzoru (19) szeregu (35) oraz różnice pomiędzy nimi.

Porównując wyniki zamieszczone w tabelach 5, 6 oraz w tabelach 2, 3 widzimy, że aproksymacja szeregiem Czebyszewa zapewnia wyższą dokładność. Przy takim samym stopniu wielomianu uzyskujemy wyższą dokładność.

Tabela 5

φ [°]	λ [°]	x [km]	x_p [km]	$x-x_p$ [km]
48	14	16104.0199	16104.0196	0.0003
52	14	17953.1174	17953.1181	-0.0007
54	14	19025.4827	19025.4815	0.0012
48	18	15784.7063	15784.7058	0.0005
52	18	17597.1396	17597.1403	-0.0007
54	18	18648.2418	18648.2408	0.0010
48	22	15388.4912	15388.4909	0.0003
52	22	17155.4302	17155.4307	-0.0005
54	22	18180.1485	18180.1478	0.0007

Tabela 6

φ [°]	λ [°]	y [m]	y_p [m]	$y-y_p$ [m]
48	14	4015.1831	4015.1831	0.0000
52	14	4476.2149	4476.2151	-0.0002
54	14	4743.5856	4743.5854	0.0002
48	18	5128.7620	5128.7620	0.0000
52	18	5717.6572	5717.6575	-0.0003
54	18	6059.1811	6059.1808	0.0003
48	22	6217.3540	6217.3540	0.0000
52	22	6931.2437	6931.2439	-0.0002
54	22	7345.2568	7345.2565	0.0003

Podsumowanie

Opisana w artykule metoda aproksymacji jednostajnej stanowi alternatywę w stosunku do stosowanej powszechnie metody aproksymacji średniokwadratowej. Stosując szeregi oparte o ortogonalne wielomiany Czebyszewa unikamy konieczności rozwiązywania dużych układów równań, co pozwala uniknąć wielu problemów numerycznych. Opisana metoda, co widać na zamieszczonych przykładach, daje lepsze rezultaty pod względem dokładnościowym od typowych metod stosowanych w aproksymacji średniokwadratowej. Prosta konstrukcja algorytmów stosowanych w obliczeniach jest dodatkowym atutem przemawiającym za wyborem tej metody.

Literatura

Björck A., Dahlquist G., 1987: Metody numeryczne, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Leng G., 1997: Compression of aircraft aerodynamic database using multivariable Chebyshev polynomials, *Advances in Engineering Software* 28: 133-141.

Paszkowski S., 1995: Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Ralston A., 1971: Wstęp do analizy numerycznej, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Abstract

Usually the least square method is used for approximation of map projection. Determination of polynomial coefficients requires solution of a complicated system of equations. It is possible to avoid such a problem using orthogonal Chebyshev polynomials. This is a completely different method of approximation, where the maximum difference between the value of the function and the value calculated from polynomial is minimized. In the paper, properties of Chebyshev polynomials approximations are presented as wall as their application to map projection approximation and comparison with other methods of map projection.

dr hab. inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl