

**WYBRANE ASPEKTY KONSTRUOWANIA
ODWZOROWAŃ KARTOGRAFICZNYCH
O MOŻLIWIE NAJMNIEJSZYCH
ZNIEKSZTAŁCENIACH ODWZOROWAWCZYCH**

**SELECTED CONSTRUCTION ASPECTS OF MAP
PROJECTIONS WITH MINIMAL POSSIBLE DISTORTION**

Paweł Pędzich

Zakład Kartografii Politechniki Warszawskiej

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, zniekształcenia odwzorowawcze

Keywords: mathematical cartography, map projection, map projection distortion

Wstęp

Rozwój systemów informacji geograficznej powoduje zmianę roli odwzorowań kartograficznych. Dane wektorowe mogą być gromadzone w bazach danych przestrzennych w postaci zbiorów współrzędnych punktów na elipsoidzie odniesienia. Daje to możliwość dynamicznego doboru odwzorowania w zależności od aktualnych potrzeb użytkownika systemu. Dlatego też zadanie polegające na poszukiwaniu nowych odwzorowań kartograficznych spełniających różne kryteria nabiera coraz większego znaczenia. Ponadto rozwój technologii informatycznych ułatwił generowanie odwzorowań kartograficznych wymagających skomplikowanych obliczeń. Zaprogramowanie zadania odwzorowania kartograficznego, spełniającego nawet bardzo złożone kryteria dotyczące np. minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych, jest stosunkowo łatwe do wykonania.

W artykule przedstawiono pewne zagadnienia dotyczące poszukiwania odwzorowań kartograficznych o minimalnych zniekształceniach odwzorowawczych konstruowanych wg różnych kryteriów. Zaprezentowano pewne sposoby minimalizacji zniekształceń w odwzorowaniach kartograficznych oraz przykłady odwzorowań kartograficznych obszaru Polski opracowanych według różnych kryteriów co do rozkładu zniekształceń odwzorowawczych.

Rys historyczny problematyki poszukiwania odwzorowań o najmniejszych zniekształceniach odwzorowawczych

Pierwsze prace nad rozwiązaniem problemu poszukiwania odwzorowań kartograficznych o jak najmniejszych zniekształceniach odwzorowawczych pojawiły się w wieku XIX wraz z intensywnym rozwojem matematyki. W okresie tym kartografią matematyczną oraz

problemem konstruowania odwzorowań kartograficznych spełniających różne kryteria dotyczące rozkładu zniekształceń odwzorowawczych zajmowali się najwięksi uczeni, m.in. Gauss, Czebyszew, Lambert, Lagrange. Wśród prac poświęconych problematyce minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych na największą uwagę zasługują prace Tissota, Airy'ego oraz Czebyszewa. Miały one ogromny wpływ na rozwój wiedzy z zakresu kartografii matematycznej oraz do dziś stanowią podstawę konstrukcji odwzorowań kartograficznych i kryteriów minimalizujących zniekształcenia odwzorowawcze.

August Tissot w 1860 r. podał kryterium minimalizacji zniekształceń w odwzorowaniach kartograficznych, a w 1881 r. przedstawił metodę konstrukcji odwzorowania o minimalnych zniekształceniach. Ograniczając się do aproksymacji funkcji odwzorowawczych wielomianami potęgowymi trzeciego stopnia przedstawił odwzorowanie zbliżone do odwzorowania konforemnego stożkowego i odwzorowania konforemnego stereograficznego.

W 1861 George B. Airy przedstawił ideę odwzorowania azymutalnego pośredniego pomiędzy odwzorowaniem konforemnym i odwzorowaniem równopolewym. Odwzorowanie posiadało minimalne zniekształcenia zgodnie z zaproponowanym kryterium całkowym (Bieracki, 1949).

W 1853 r. rosyjski uczony Pafnutij Lwowicz Czebyszew sformułował twierdzenie o „najlepszych” odwzorowaniach konforemnych posiadających najmniejsze zniekształcenia liniowe. Podał przy tym kryterium, które pozwala minimalizować oscylację zniekształceń długości linii w całym odwzorowywanym obszarze (Pędzich, 2002).

Miary zniekształceń odwzorowawczych oraz kryteria minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych

Badanie stanu rozkładu zniekształceń odwzorowawczych w regularnym odwzorowaniu powierzchni w powierzchnię odbywa się za pomocą miar różnego typu. Konstruując kryterium odwzorowawcze opieramy się również na specjalnie skonstruowanych w tym celu miarach. Miary te mogą mieć charakter lokalny lub globalny.

Miary charakteryzujące stan rozkładu zniekształceń odwzorowawczych

Wszelkie miary zniekształceń odwzorowawczych można podzielić na:

- miary lokalno-kierunkowe, zależne od położenia punktu i kierunku w tym punkcie,
- miary lokalne, zależne tylko od położenia punktu,
- miary integralne, charakteryzujące stan rozkładu zniekształceń odwzorowawczych w całym dowolnie wyróżnionym obszarze.

Wybrane miary lokalno-kierunkowe

Lokalno-kierunkowe miary zniekształceń w odwzorowaniu charakteryzują zniekształcenie długości linii w danym punkcie i w wyróżnionym kierunku. Zależą więc one od położenia punktu i od kierunku w tym punkcie.

Do podstawowych miar lokalno-kierunkowych zaliczamy lokalno-kierunkową skalę długości, lub krótko skalę długości

$$\mu = \frac{ds'}{ds} \quad (1)$$

gdzie ds i ds' są to elementarne łuki na powierzchni oryginału i powierzchni obrazu w odwzorowaniu kartograficznym.

Zależność

$$z = \mu - 1 \quad (2)$$

wyraża względne lokalno-kierunkowe zniekształcenie długości.

Czasem stosuje się lokalno-kierunkowe zniekształcenie długości jako logarytm naturalny skali długości

$$z = \ln \mu \quad (3)$$

Wybrane miary lokalne

Miary lokalne charakteryzują zniekształcenia długości w danym punkcie odwzorowania i nie zależą one od kierunku. Wyznaczane są one na podstawie miar lokalno-kierunkowych.

Miary Airy'ego

$$e_{A1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{n} - 1 \right)^2 + (mn - 1)^2 \right] \quad (4)$$

$$e_{A2} = \frac{1}{2} \left[(m - 1)^2 + (n - 1)^2 \right] \quad (5)$$

gdzie m i n stanowią ekstrema skali długości μ .

Miara Jordana

$$e_J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu - 1)^2 d\alpha \quad (6)$$

Miary Kawrajskiego

$$e_{AK} = \frac{1}{2} \left[(\ln m)^2 + (\ln n)^2 \right] \quad (7)$$

$$e_{JK} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln \mu)^2 d\alpha \quad (8)$$

Wybrane miary integralne

Miary integralne charakteryzują w sposób kompleksowy zniekształcenia odwzorowawcze w pewnym wyróżnionym podobszarze o polu S .

$$E = \frac{1}{S} \int_S e dS \quad (9)$$

gdzie e oznacza jedną z przedstawionych powyżej miar lokalnych,

Kryteria minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych

Na podstawie miar zniekształceń odwzorowawczych można tworzyć różnego rodzaju kryteria doboru odwzorowań kartograficznych. Kryteria te mają umożliwiać minimalizację rozkładu zniekształceń odwzorowawczych w zadanym obszarze. Posługując się nimi w obrębie całego odwzorowywanego obszaru, poszukujemy postaci funkcji odwzorowawczych spełniających zadane warunki.

Omawiane kryteria dzielimy na globalne, odnoszące się do odwzorowań minimalizujących zniekształcenia odwzorowawcze na całym odwzorowywanym obszarze oraz szczegółowe, dotyczące pewnej grupy odwzorowań, w których dana krzywa lub krzywe odwzorowują się ze stałą skalą.

Kryteria globalne stosowane są zarówno do poszukiwania funkcji odwzorowawczych nieograniczonych żadnymi warunkami dodatkowymi, jak również do poszukiwania funkcji odwzorowawczych z ograniczeniami, tj. warunkami np. konforemności lub równopolowości. Kryteria szczegółowe są przeważnie stosowane do wyznaczenia odwzorowań ze z góry narzuconymi warunkami dodatkowymi.

Kryteria globalne

Kryteria globalne tworzy się w oparciu o miary integralne zniekształceń odwzorowawczych. Narzuca się wówczas wymóg aby odwzorowanie spełniało warunek minimum jednej z miar integralnych.

$$E = \frac{1}{S} \int_S edS = \min \quad (10)$$

Wybrane kryteria szczegółowe

Tego rodzaju kryteria w kartografii są najczęściej stosowane. Stwarzają możliwości wprowadzania dodatkowych warunków, takich jak np. równokątności lub równopolowości. Weźmy pod uwagę np. odwzorowania, w których zadana krzywa odwzorowuje się ze skalą równą jeden. Takie odwzorowania są w otoczeniu tych krzywych w przybliżeniu izometryczne. Jeżeli okaże się, że tych odwzorowań jest nieskończenie wiele, można wówczas na te odwzorowania narzucać dodatkowe warunki.

Kryterium De L'Isle. Francuski astronom Joseph Nicolas De L'Isle w 1745 r. sformułował kryterium w postaci: dwa z góry wyróżnione równoleżniki $B = \text{const}$ o wartościach B_1 i B_2 powierzchni elipsoidy odwzorowują się izometrycznie.

Kryterium Eulera. Matematyk szwajcarski Leonhard Euler w 1777 r. zażądał, aby na dwóch skrajnych i z góry zadanych równoleżnikach obszaru, skale (a tym samym i zniekształcenia) były jednakowe oraz aby na środkowym równoleżniku zniekształcenie liniowe było równe zniekształceniu liniowemu na równoleżnikach skrajnych, lecz wziętych ze znakiem przeciwnym. Ponadto zniekształcenie na równoleżniku środkowym osiąga minimum. Kryterium Eulera zastosował do odwzorowania stożkowego równoodległościowego W. Witkowski, stąd czasem w literaturze można spotkać nazwę kryterium Witkowskiego.

Kryterium Kawrajskiego. Kryterium polega na żądaniu aby na dwóch skrajnych równoleżnikach obszaru skale zniekształceń długości były jednakowe oraz skala zniekształceń na równoleżniku środkowym osiągała minimum i była równa odwrotności skali na południkach skrajnych.

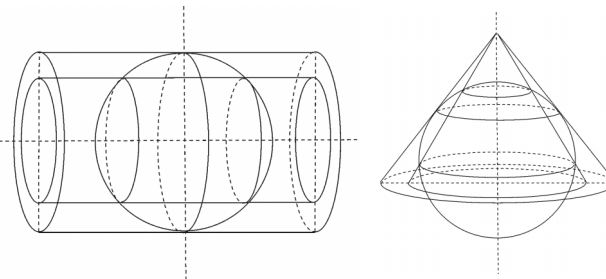
Kryterium Czebyszewa. W 1853 r. P. L. Czebyszew sformułował twierdzenie o najlepszych odwzorowaniach. Kryterium polega na zachowaniu stałości skali na brzegu odwzorowywanego obszaru.

Sposoby minimalizacji zniekształceń odwzorawczych

Najprostszym sposobem zmniejszenia zniekształceń odwzorawczych w odwzorowywanym obszarze jest dobór parametrów odwzorowania definiujących przebieg linii zerowych zniekształceń, np. dobór współczynnika skali m_0 w odwzorowaniach konforemnych

$$x = m_0 \times f_1(B, L), \quad y = m_0 \times f_2(B, L) \quad (11)$$

Pomnożenie funkcji odwzorawczych w odwzorowaniach konforemnych, przez pewien stały współczynnik, powoduje zmianę rozkładu zniekształceń odwzorawczych, przy jednoczesnym zachowaniu konforemności odwzorowania. Takie działanie obrazowo można zinterpretować jako przekształcenie odwzorowania kartograficznego prowadzące do uzyskania sieczności powierzchni obrazu względem powierzchni oryginału (rys. 1).



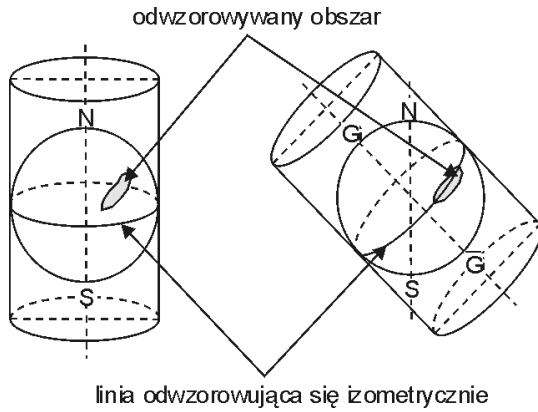
Rys. 1. Odwzorowania walcowe i stożkowe sieczne

W innych typach odwzorowań niż konforemne problem doboru współczynnika skali jest nieco bardziej złożony. Pomnożenie funkcji odwzorawczych przez ten sam stały współczynnik skali może spowodować zmianę podstawowych własności tych odwzorowań. Dlatego też chcąc zachować własności odwzorowania stosujemy nieco odmienne zasady, np. w odwzorowaniach równopolowych można zastosować następujące przekształcenie funkcji odwzorawczych

$$x = m_0 \times f_1(B, L), \quad y = \frac{1}{m_0} \times f_2(B, L) \quad (12)$$

powodujące zmianę rozkładu zniekształceń odwzorawczych, przy jednoczesnym zachowaniu równopolowości odwzorowania.

Pewne możliwości minimalizacji zniekształceń odwzorawczych posiadają odwzorowania ukośne. Poprzez zastosowanie układu azymutalnego na sferze można dokonać transformacji odwzorowania kartograficznego normalnego do postaci odwzorowania ukośnego powodując zmianę rozkładu zniekształceń odwzorawczych w zadanym obszarze, przy jednoczesnym zachowaniu podstawowych własności odwzorowania, np. konforemności lub równopolowości. Poprzez dobór odpowiednich parametrów dowiązania układu azymutalnego do układu geograficznego, definiujących wzajemne relacje pomiędzy tymi układami, możemy dodatkowo doprowadzić do pokrycia się linii zerowych zniekształceń odwzorawczych z podłużną rozciągłością danego obszaru, uzyskując w ten sposób znaczne zmniejszenie zniekształceń w odwzorowywanym obszarze (rys. 2).



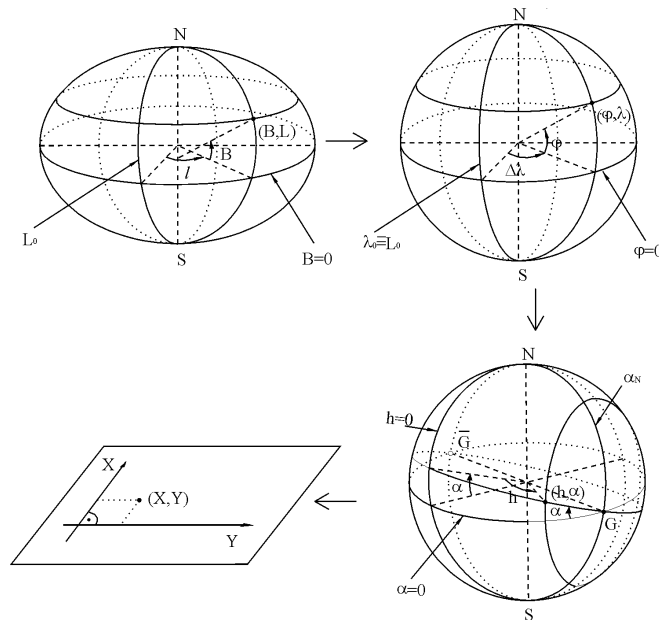
Rys. 2. Odwzorowania ukośne

W odwzorowaniach ukośnych jako powierzchnię oryginału wykorzystuje się sferę. W przypadku elipsoidy problem jest bardziej skomplikowany. Wówczas stosuje się tzw. odwzorowania złożone stanowiące połączenie kilku odwzorowań kartograficznych. Odwzorowanie takie realizowane jest w kilku etapach. W pierwszym etapie dokonuje się odwzorowania elipsoidy na sferę, następnie na sferze wprowadza się układ ukośny, a następnie odwzorowuje się sferę na płaszczyznę (rys. 3).

Kolejnym sposobem zmniejszenia zniekształceń w odwzorowaniach kartograficznych jest podział powierzchni oryginału na wąskie strefy odwzorawcze. Takie rozwiązanie pozwala na uzyskanie stosunkowo niewielkich zniekształceń w obrębie odwzorowywanego obszaru, jednak kosztem utraty ciągłości odwzorowania. Nieciągłość powoduje konieczność wykonywania transformacji pomiędzy strefami odwzorawczymi.

Innym sposobem wykorzystywanym w kartografii jest łączenie różnych kryteriów odwzorawczych. Przykładem takiego rozwiązania jest odwzorowanie Goode'a, które stanowi kombinację odwzorowań Sansona i Mollweidego.

Jednak największe możliwości w zakresie minimalizacji zniekształceń odwzorawczych uzyskuje się poprzez zastosowanie opisanych wcześniej (str. 92) kryteriów minimalizacyjnych. Istnieje szereg prac opisujących problem konstrukcji odwzorowań w oparciu o kryteria globalne i szczegółowe. Gdowski (1969) przedstawił metodę konstrukcji odwzorowań kartograficznych wg kryterium Airy'ego z zastosowaniem rachunku wariacyjnego. W pracy (Balcerzak, Panasiuk, Pokrowska, 1995) wyprowadzono formuły odwzorawcze dla odwzorowań stożkowych elipsoidy w płaszczyznę spełniających kryteria Kawrajskiego i Eulera.



Rys. 3. Odwzorowanie złożone

Minimalizacja zniekształceń w odwzorowaniach konforemnych

Twierdzenie Czebyszewa jako podstawa konstrukcji odwzorowań kartograficznych konforemnych o minimalnych zniekształceniach odwzorowawczych

W 1853 r. rosyjski uczoney Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821–1894) sformułował twierdzenie o „najlepszych” kartograficznych odwzorowaniach konforemnych posiadających najmniejsze zniekształcenia liniowe. Podał przy tym kryterium, które pozwala minimalizować oscylację zniekształceń długości w całym odwzorowywanym obszarze. Według twierdzenia Czebyszewa w klasie odwzorowań konforemnych obszaru najmniejszą oscylację logarytmu naturalnego skali długości posiada odwzorowanie, w którym skala na brzegu obszaru jest stała. Dowód tego twierdzenia podał w 1896r. D. A. Grawe.

W literaturze możemy znaleźć wiele prac poświęconych zagadnieniu tworzenia odwzorowań spełniających to kryterium. Urmajew (1962) wyznaczył odwzorowanie Czebyszewa dla półkuli ograniczonej południkami $\lambda = -\pi/2$ i $\lambda = \pi/2$. Wartość skali długości w tym odwzorowaniu osiąga maksimum $m = 1$ na brzegu obszaru. Natomiast w środku obszaru $\varphi = 0$, $\lambda = 0$ osiąga minimum $m = 1/2$. Metoda zaproponowana przez Urmajewa nie ma charakteru ogólnego. Nie znajduje zastosowania w przypadku dowolnego obszaru.

Gdowski (1969) podał analityczną metodę konstruowania odwzorowań typu Czebyszewa w kole geodezyjnym. Rozwiązał zagadnienie Dirichleta przy użyciu ortonormalnego układu funkcji harmonicznym na brzegu obszaru. W innej pracy Gdowski (1971) podał uproszczoną metodę konstruowania odwzorowania typu Czebyszewa w kole geodezyjnym w postaci szeregów potęgowych ograniczając je do wyrazów rzędu trzeciego.

W 1953 roku, O.M. Miller opracował zmodyfikowane odwzorowanie stereograficzne dla Europy i Afryki. Wykonane mapy posiadają linie stałych zniekształceń w kształcie owali (Snyder, 1987).

Lee zastosował kryterium Czebyszewa do odwzorowania stereograficznego ukośnego dla mapy Oceanu Spokojnego (Snyder, 1987).

Snyder (1987) opracował zmodyfikowane stereograficzne konforemne odwzorowanie 48 Stanów Zjednoczonych, ograniczonych przez izoskalę o kształcie prostokątnym z zaokrąglonymi narożnikami.

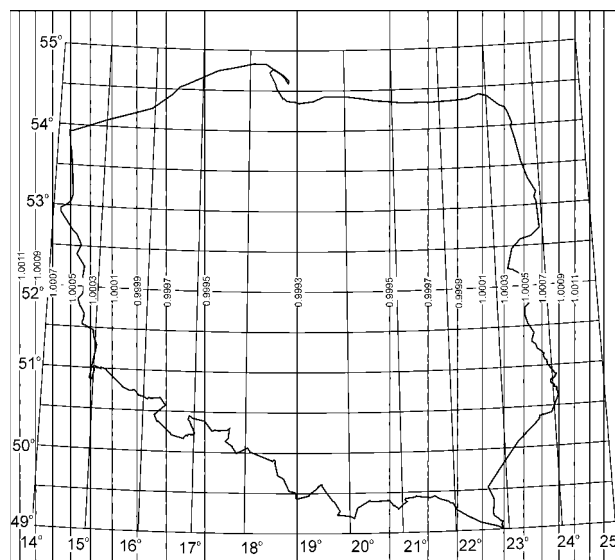
Z kolei Bugajewski (1986) podał w zarysie sposób wyznaczenia odwzorowania typu Czebyszewa metodami numerycznymi dla obszaru ograniczonego dowolną krzywą zamkniętą.

W pracy (Pędzich, 2002) przedstawiono rozwinięcie metody opracowanej przez Bugajewskiego oraz zastosowano ją do opracowania odwzorowania Czebyszewa obszaru Polski. W metodzie tej funkcje odwzorowawcze aproksymuje się szeregami potęgowymi zmiennej zespolonej, których współczynniki wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów.

Twierdzenie Czebyszewa stanowi podstawę tworzenia odwzorowań kartograficznych o minimalnych zniekształceniach odwzorowawczych. Stanowi również punkt odniesienia dla innych odwzorowań konforemnych. Poprzez porównanie odwzorowań kartograficznych opracowanych wg różnych kryteriów odwzorowawczych z odwzorowaniem Czebyszewa można ocenić wartość kryterium pod względem możliwości minimalizacji zniekształceń w odwzorowywanym obszarze.

Porównanie wybranych odwzorowań kartograficznych konforemnych Polski opracowanych według różnych kryteriów

Powszechnie stosowanym w geodezji odwzorowaniem konforemnym jest odwzorowanie Gaussa-Krügera. Najczęściej jest to pewna modyfikacja tego odwzorowania polegająca na zastosowaniu odpowiedniego współczynnika skali na południku osiowym. W układzie „1992” stosuje się jednostrefowe odwzorowanie Polski ze skalą na południku osiowym $m_0=0,9997$ (rys. 4). W tym układzie izoskale długości mają postać linii prostych prawie równoległych do obrazu południka osiowego, zniekształcenia osiągają największe wartości na południku osiowym 70 cm/km i na krańcach południowo-wschodnich Polski osiągają ok. 90 cm/km.

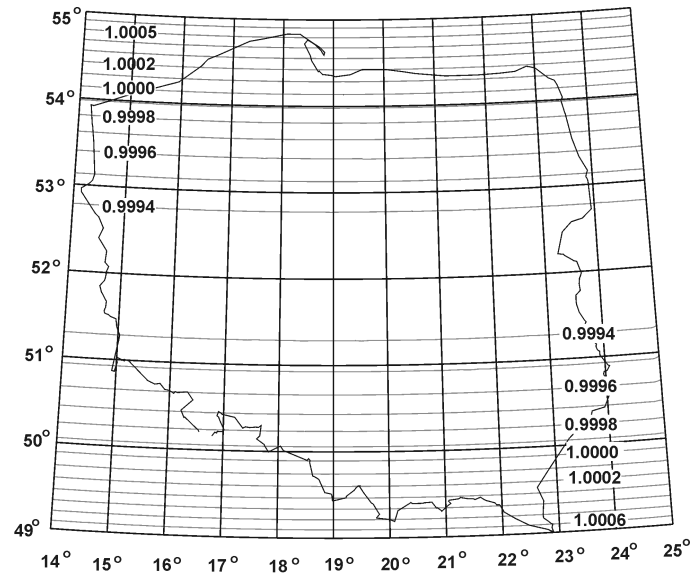


Rys. 4. Odwzorowanie Gaussa-Krügera, układ „1992”

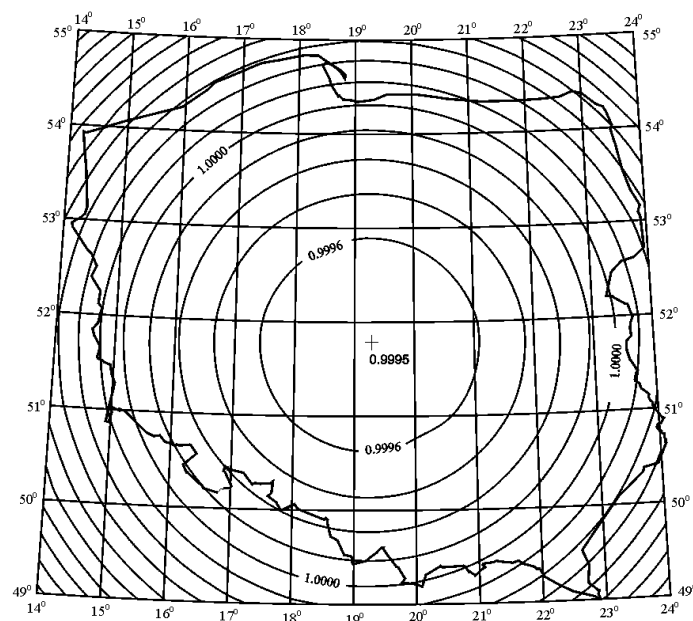
W odwzorowaniach stożkowych opracowanych wg kryteriów Kawrajskiego i Eulera uzyskujemy niemal identyczny rozkład zniekształceń długości na obszarze Polski (rys. 5). Izoskale mają postać krzywych równoległych do obrazów równoleżników. Maksymalne zniekształcenia długości występują na południu i północy Polski i wynoszą ok. + 65 cm/km. Są one więc znacznie mniejsze niż w jednostrefowym odwzorowaniu Gaussa-Krügera.

W odwzorowaniu Roussilhe’a obszaru Polski ze współczynnikiem skali w punkcie głównym $m_0=0,9995$ uzyskujemy rozkład zniekształceń odwzorowawczych, w którym izoskale mają postać zbliżoną do koncentrycznych okręgów o środku w punkcie głównym odwzorowania (rys. 6). Maksymalne zniekształcenia długości w punkcie głównym odwzorowania wynoszą -50 cm/km oraz na krańcach południowo-wschodnich Polski ok. +60 cm/km. Stąd widać, że zniekształcenia w tym odwzorowaniu są nieco mniejsze niż w odwzorowaniu stożkowym oraz znacznie mniejsze niż w odwzorowaniu Gaussa-Krügera.

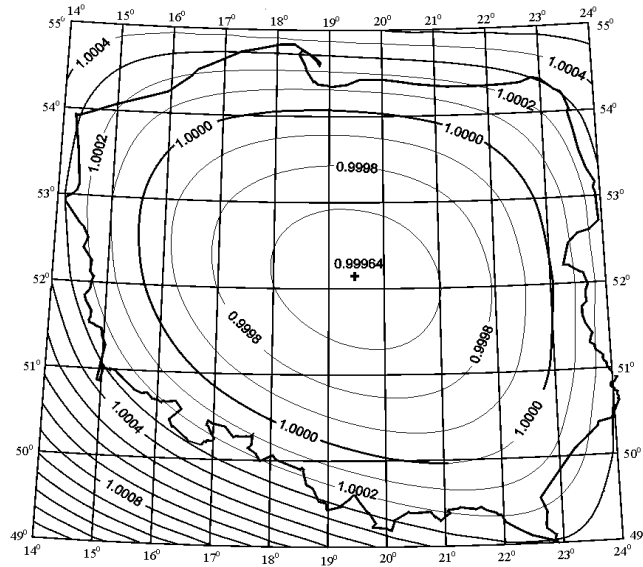
Zastosowanie kryterium Czebyszewa pozwala wygenerować odwzorowanie, w którym izoskale długości układają się współkształtnie do brzegu obszaru. W odwzorowaniu takim uzyskujemy znaczne zmniejszenie zniekształceń odwzorowawczych, w odwzorowaniu Polski maksymalne zniekształcenia długości wynoszą ok. ± 36 cm/km (rys. 7).



Rys. 5. Odwzorowanie stożkowe Polski wg kryterium Kawrajskiego i Eulera



Rys. 6. Odwzorowanie Roussilhe'a obszaru Polski



Rys. 7. Odzworowanie Polski wg kryterium Czebyszewa

Minimalizacja zniekształceń w odzworowaniach równopolowych

W 1898 roku N. J. Cinger postawił hipotezę, że twierdzenie Czebyszewa (udowodnione dla odzworowań konforemnych) jest słuszne również dla odzworowań równopolowych. Jednak B. B. Kawrajski skonstruował odzworowanie, za pomocą którego wykazał, że hipoteza Cingera jest niesłuszna (Gdowski, 1975).

Problem minimalizacji zniekształceń w odzworowaniach równopolowych pozostaje nadal otwarty.

W 1968 r. G.A. Mieszczeriakow podał odzworowania w następującej postaci (Gdowski, 1975):

$$\begin{cases} \mu_u \mu_v \cos \varepsilon = 1 \\ \mu_u - \mu_v = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_u \mu_v \cos \varepsilon = 1 \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

gdzie ε – zniekształcenie kąta parametrycznego, μ_u , μ_v – skale parametryczne.

Odzworowanie opisane pierwszym układem równań nazwał odzworowaniem równopolowym półkonforemnym, zaś dla drugiego przyjął nazwę odzworowania Eulera. Obie te klasy uznał za najbardziej bliskie odzworowaniom konforemnym, ponieważ w każdym z tych odzworowań zachowuje się jeden z warunków konforemności. Odzworowania spełniające obydwa warunki są odzworowaniami izometrycznymi, nie posiadającymi zniekształceń. Stąd też minimalizacja zniekształceń odzworowawczych w odzworowaniach równopolowych oznacza dążenie do uzyskania jak najmniejszych zniekształceń kątów.

Trudno uznać przedstawione odzworowania za najbardziej zbliżone do konforemnych.

Przykładowo, odwzorowanie równopolowe walcowe spełnia jedno z wymienionych kryteriów, a jednak nie można uznać go za najbliższe odwzorowaniom konforemnym, gdyż posiada bardzo duże zniekształcenia kątów.

Istnieje wiele ciekawych koncepcji dotyczących minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniach równopolowych. Ciekawym sposobem minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniach równopolowych są tzw. transformacje wielomianowe istniejących odwzorowań kartograficznych (Canters, 2002). Wykorzystując tę metodę Canters zaproponował serię zmodyfikowanych odwzorowań równopolowych azymutalnych dla Unii Europejskiej.

W pracy (Gdowski, 1975) podano kilka przykładów odwzorowań równopolowych spełniających kryteria integralne wyznaczonych w oparciu o rachunek wariacyjny.

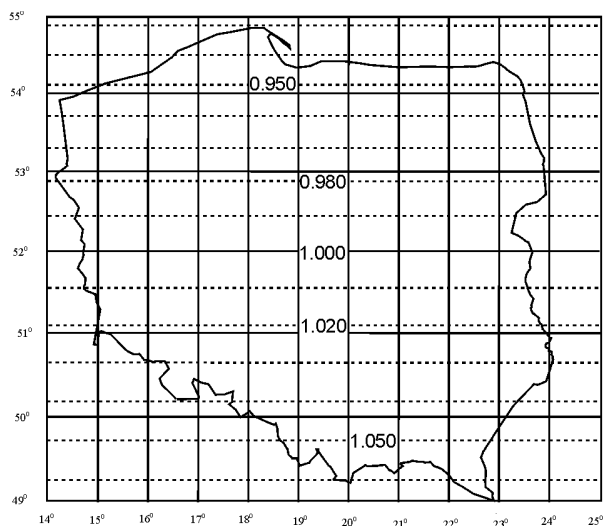
Porównanie wybranych odwzorowań kartograficznych równopolowych Polski opracowanych według różnych kryteriów

W odwzorowaniach równopolowych skala długości zależy od kierunku w danym punkcie. Ponadto maksimum skali długości jest równe odwrotności minimum skali długości. Stąd w odwzorowaniach równopolowych badając zniekształcenia długości można ograniczyć się do badania jednej ze skal ekstremalnych. W odwzorowaniach równopolowych dążymy do uzyskania jak najmniejszych zniekształceń kątowych. Dlatego też istotne znaczenie ma ich badanie.

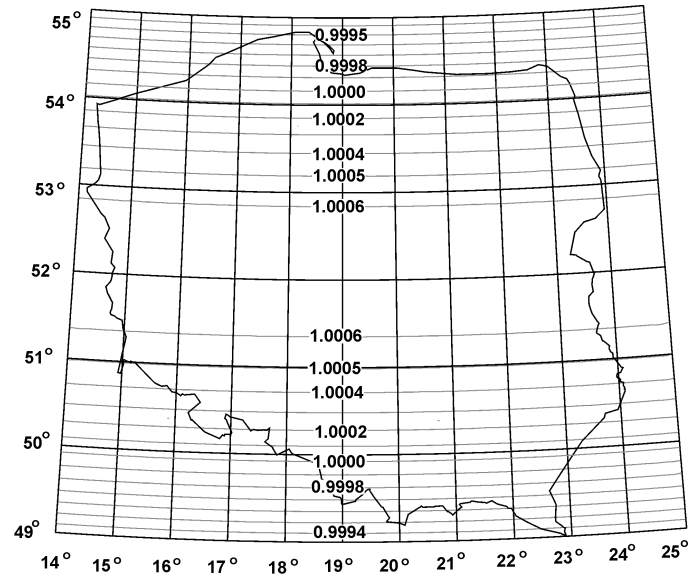
Odwzorowanie walcowe równopolowe spełnia jedno z kryteriów Mieszczeriakowa dotyczące odwzorowań półkonforemnych. Jednak zniekształcenia odwzorowawcze długości w takim odwzorowaniu są bardzo duże. Przykładowo dla obszaru Polski maksymalne zniekształcenia długości wnoszą ok. 70 m/km na południu i północy kraju (rys. 8). Maksymalne zniekształcenia kątowe wynoszą ok. 4° .

W odwzorowaniach stożkowych opracowanych wg kryteriów Kawrajskiego i Eulera uzyskujemy niemal identyczny rozkład zniekształceń długości na obszarze Polski (rys. 9). Izoskale mają postać krzywych równoległych do obrazów równoleżników. Maksymalne zniekształcenia długości występują na południu i północy Polski i wynoszą ok. + 60 cm/km. Maksymalne zniekształcenia kątów wynoszą ok. $2'$.

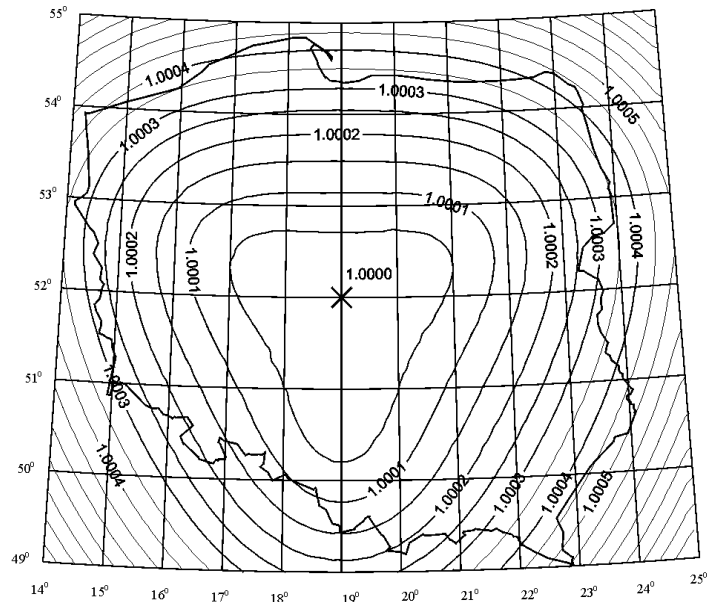
Interesujące wyniki uzyskamy stosując odwzorowania złożone. W odwzorowaniu Polski złożonym z odwzorowania równopolowego elipsoidy na sferę oraz sfery na płaszczyznę uzyskamy maksymalne zniekształcenia odwzorowawcze rzędu ok. 55 cm/km. Rozkład zniekształceń w tym odwzorowaniu ilustruje rysunek 10. Maksymalne zniekształcenia kątów wynoszą ok. $1,7'$.



Rys. 8. Odwzorowanie walcowe równopolowe Polski



Rys. 9. Odzworowanie stożkowe Polski wg kryterium Kawrajskiego i Eulera



Rys. 10. Odzworowanie równopolowe złożone z odzworowania równopolowego elipsoidy na sferę oraz odzworowania azymutalnego równopolowego sfery w płaszczyznę

Podsumowanie

Twierdzenie Czebyszewa rozstrzyga o problemie minimalizacji zniekształceń w odwzorowaniach konforemnych. W odwzorowaniach równopolowych problem minimalizacji zniekształceń jest otwarty. Problem poszukiwania odwzorowań równopolowych o możliwie małych zniekształceniach długości nabiera szczególnego znaczenia w aspekcie praktycznych zastosowań odwzorowań związanych z obliczaniem pól wieloboków geodezyjnych na elipsoidzie, zwłaszcza w dobie tworzenia współczesnych systemów katastralnych. Prowadzone są również prace nad poszukiwaniem odwzorowań równopolowych dla Unii Europejskiej.

Literatura

- Biernacki F., 1949: Teoria powierzchni dla geodetów i kartografów, Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego, Główny Urząd Pomiarów Kraju, Warszawa.
- Bugajewski L., Warchiramięjewa L., Kazakowa Z., 1986: Matematyczna kartografia, Nedra Moskwa.
- Canters F., 2002: Small-scale map projection design, [In:] Fisher P. and Raper J. (eds.), Research Monographs in Geographic Information Systems, London and New York: Taylor & Francis.
- Gdowski B., 1969: Minimalizacja zniekształceń w odwzorowaniach powierzchni, Prace naukowe, Geodezja, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Gdowski B., 1971: O pewnej metodzie konstrukcji odwzorowań Czebyszewa, *Geodezja i Kartografia*, Rocznik XX, 2/71, Warszawa.
- Gdowski B., 1975: Optymalne odwzorowania równopolowe, *Geodezja i Kartografia*, Rocznik XXIV 3/75, Warszawa.
- Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Pędzich P., 2002: Opracowanie odwzorowania kartograficznego o optymalnym rozkładzie zniekształceń według kryterium Czebyszewa dla ograniczonego obszaru powierzchni elipsoidy, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa.
- Snyder J.P., 1987: Map projections – a working manual, United States Government Printing Office, Washington.
- Urmajew H., 1962: Osnovy matematycznej kartografii, Trudy CNIGAIK, Moskwa.

Abstract

The paper deals with map projection minimizing distortion problem. Main criteria of minimizing distortion are presented and some examples of map projection constructed using different criteria are shown. In conformal projection, the problem of minimizing distortions is resolved by Chebyshev theorem. In equal-area projection the problem is still open, because of its possible application to calculation of geodetic polygons. Moreover, a search is going on for the equal-area projection for EU.

dr hab. inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel. +48 22 234 76 90