

**BADANIE NIEREGULARNOŚCI ODWZOROWANIA
CASSINIEGO-SOLDNERA
ELIPSOIDY OBROTOWEJ SPŁASZCZONEJ**

**ANALYSIS OF IRREGULARITY
OF THE CASSINI-SOLDNER PROJECTION
OF AN ELLIPSOID**

Jerzy Balcerzak, Paweł Pędzich

Zakład Kartografii Politechniki Warszawskiej

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, odwzorowanie Cassiniego-Soldnera

Keywords: mathematical cartography, map projection, Cassini-Soldner projection

Wstęp

Dokładne zbadanie własności odwzorowania kartograficznego jest trudnym, lecz niezwykle istotnym zadaniem umożliwiającym jego pełne wykorzystanie w pracach geodezyjnych i kartograficznych. Wyznaczenie osobliwości odwzorowania kartograficznego pozwala ominąć pewne trudności związane z jego globalnym zastosowaniem oraz uniknąć błędów, które można popełnić w trakcie jego użytkowania. Dokładne zbadanie nieregularności odwzorowania wymaga najczęściej wykorzystania nietypowych metod i algorytmów określania własności danego odwzorowania. Typowe metody, stosowane w podobszarze regularności najczęściej zawodzą.

Układ współrzędnych Soldnera oraz odwzorowanie Cassiniego-Soldnera posiadają istotne znaczenie w pracach geodezyjnych wielu krajów. Stosowane dotychczas metody obliczania współrzędnych oraz określania własności układu Soldnera, a także odwzorowania Cassiniego-Soldnera dotyczą wąskich, kilku stopniowych stref odwzorowawczych. Autorzy artykułu przedstawili, w wielu pracach, metodę tworzenia oraz badania własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy, nie analizując szczegółowo jego osobliwości. W niniejszym artykule zostaną przedstawione pewne osobliwości występujące w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera na brzegu siatki kartograficznej. Są one związane z przebiegiem linii geodezyjnej na elipsoidzie. Przedstawione w artykule rozważania stanowią rozwinięcie wiedzy na temat układu współrzędnych Soldnera na elipsoidzie, odwzorowania Cassiniego-Soldnera, a także przebiegu linii geodezyjnej na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej.

Podstawowe pojęcia dotyczące współrzędnych Soldnera oraz odwzorowania Cassiniego-Soldnera

Współrzędne Soldnera η i ξ powierzchni elipsoidy

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \left[\frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right] \quad (1)$$

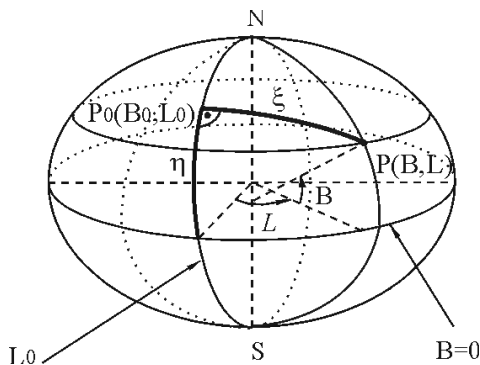
$$(B, L) \in \omega = \left\{ (B, L) : B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), L \in (-\pi, \pi) \right\}$$

są zdefiniowane (rys. 1) jako:

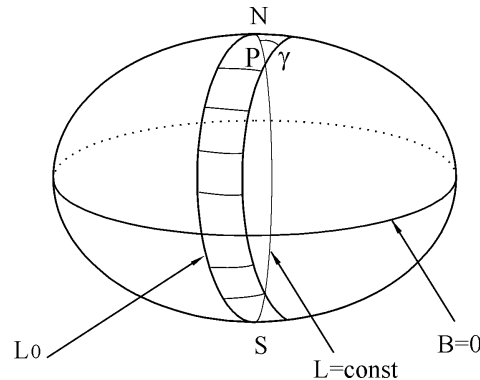
η – długość łuku południka $L=L_0$ łączącego punkty $(B=0, L=L_0)$ i $P_0(B=B_0, L=L_0)$,

ξ – długość łuku linii geodezyjnej ortogonalnej do południka centralnego $L=L_0$ łączącego punkty $P_0(B_0, L_0)$ i $P(B, L)$, gdzie P_0 jest jej punktem zwrotu na południku $L=L_0$.

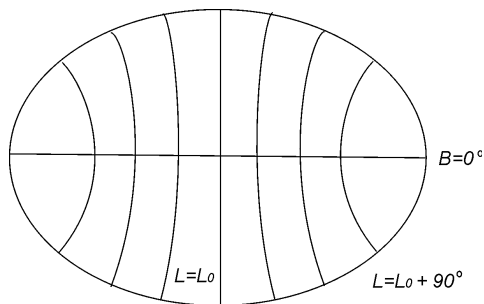
Jeżeli poprowadzimy zbiór linii geodezyjnych ortogonalnie do południka centralnego $L=L_0$ o jednakowych długościach, to końce tych odcinków utworzą południk soldnerowski (rys. 2). Wszystkie wymienione linie geodezyjne przecinają południk soldnerowski pod kątami prostymi. Południk geograficzny dowolnego punktu oraz południk soldnerowski tworzą kąt γ zwany zbieżnością południkową soldnerowską.



Rys. 1. Współrzędne Soldnera na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej



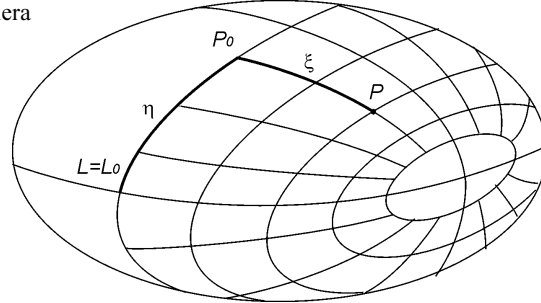
Rys. 2. Południk soldnerowski oraz soldnerowska zbieżność południków



Południk soldnerowski na elipsoidzie nie jest krzywą płaską (rys. 3). Punkty tworzące południk soldnerowski w pobliżu równika leżą bliżej płaszczyzny południka centralnego niż punkty w pobliżu bieguna (Szpunar, 1982).

Rys. 3. Południki soldnerowskie na elipsoidzie

Rys. 4. Siatka współrzędnych Soldnera na elipsoidzie



Południki soldnerowskie oraz linie geodezyjne prostopadłe wychodzące z południka centralnego $L=L_0$ tworzą siatkę układu współrzędnych Soldnera (rys. 4).

Funkcje odwzorowawcze w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera elipsoidy obrotowej spłaszczonej o równaniu

$$\vec{r} = [x = a \cos u \cos L, y = a \cos u \sin L, z = b \sin u] , \quad (2)$$

gdzie

$$\tan u = \sqrt{1 - e^2} \tan B, \quad (3)$$

mają postać

$$\vec{r}' = [x = \eta(u, L), y = \xi(u, L)] \quad (4)$$

Wielkości η , ξ można przedstawić za pomocą zależności (Pędzich, 2007)

$$\eta = a \left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - u_0, e\right) \right], \quad (5)$$

$$\xi = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0} E[\text{am}(w, k), k], \quad (6)$$

gdzie symbolem E oznaczono całkę eliptyczną drugiego rodzaju Legendre'a w postaci normalnej, w której

$$\text{cn}(w, k) = \frac{\sin u}{\sin u_0}, \quad k = \frac{e' \sin u_0}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0}} . \quad (7)$$

$\text{cn}(w, k)$ oznacza cosinus eliptyczny Jacobiego zmiennej w z parametrem k , natomiast $\text{am}(w, k)$ oznacza amplitudę zmiennej w z parametrem k .

Powyższe formuły pozwalają na odwzorowanie całej elipsoidy.

Równanie linii geodezyjnej w funkcji jej punktu zwrotu P_0

Równanie linii geodezyjnej we współrzędnych zredukowanych u, L na powierzchni elipsoidy określonej równaniem (2) można zapisać w postaci

$$a \cos u \sin A = \text{const} = c, \quad (8)$$

gdzie $c \in \langle -a, a \rangle$ oznacza pewną stałą. Kąt kierunkowy A (Panasiuk, Balcerzak, Pokrowska, 1995) dany jest wzorem

$$A = \sphericalangle (\vec{r}_u, d\vec{r}) = \arctan \left(\frac{E \frac{du}{dL} + F}{H} \right), \quad (9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} E &= |\vec{r}_u|^2 = \left(a\sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \right)^2, \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_L = 0, \\ G &= |\vec{r}_L|^2 = (a \cos u)^2, \\ H &= |\vec{r}_u \times \vec{r}_L| = a^2 \cos u \sqrt{1-e^2 \cos^2 u}. \end{aligned} \quad (10)$$

Podstawiając współczynniki (10) do (9) otrzymujemy zależność

$$\cot A = \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\cos u} \frac{du}{dL} \quad (11)$$

Przyjmując stałą c w postaci

$$c = a \cos u_0 \sin \frac{\pi}{2} = a \cos u_0 \quad (12)$$

oraz ograniczając się do przedziału $L \in (L_0, L_0 + \tau)$, $\tau \in (0, \pi)$, w którym, $\frac{du}{dL} < 0$, tzn. u maleje gdy L rośnie, równanie (8) możemy napisać w postaci

$$-\frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\cos u} \frac{du}{dL} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\cos u_0}{\cos u}\right)^2}}{\frac{\cos u_0}{\cos u}}. \quad (13)$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$dL = -\frac{\cos u_0}{\cos^2 u} \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 u}{1-\left(\frac{\cos u_0}{\cos u}\right)^2}} du. \quad (14)$$

Parametr u linii geodezyjnej nie wychodzi poza przedział $u \in \langle -u_0, u_0 \rangle$, $u_0 \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Korzystając z zależności

$$\cos u = \frac{1}{1 + \tan^2 u}, \quad (15)$$

równanie (14) możemy przedstawić w postaci

$$dL = -\frac{\cot u_0}{\cos u} \sqrt{\frac{1 - e^2 + \tan^2 u}{1 - \cot^2 u_0 \tan^2 u}} du. \quad (16)$$

Wprowadzając zmienną v taką, że

$$\cos v = \cot u_0 \tan u, \quad (17)$$

po obustronnym zróżniczkowaniu (17)

$$dv = -\frac{\cot u_0}{\cos^2 u \sin v} \quad (18)$$

oraz podstawieniu do (20) otrzymujemy równanie

$$dL = \sqrt{\frac{1 - e^2 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}} dv, \quad (19)$$

lub po przekształceniu postać

$$dL = \sqrt{1 - \frac{e^2}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}} dv. \quad (20)$$

Po obustronnym scałkowaniu (19) równanie linii geodezyjnej na powierzchni elipsoidy obrotowej spłaszczonej we współrzędnych geodezyjnych zredukowanych u, L określone przez punkt zwrotu $P_\theta(u_\theta, L_\theta)$ można przedstawić w postaci

$$L - L_0 = \int \sqrt{1 - \frac{e^2}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}} dv, \quad (21)$$

gdzie $\cos v = u_0 \tan u$.

Celem rozwikłania problemu, w następnej kolejności, całkę (21) rozwijamy w szereg dwumienny.

Ponieważ

$$\frac{e^2}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v} \leq e^2 \in (0, 1), \quad (22)$$

to pierwiastek występujący we wzorze (21) daje się rozwinąć w szereg dwumienny postaci

$$\sqrt{1 - \frac{e^2}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{2k} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{(1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v)^k}. \quad (23)$$

Po wprowadzeniu (23) do (21) otrzymujemy wzór

$$L - L_0 = v + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{2k} \binom{\frac{1}{2}}{k} J_k, \quad (24)$$

w którym

$$J_k = \int \frac{dv}{(1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v)^k}. \quad (25)$$

Dalej zajmujemy się rozwiązaniem całki J_k . W tym celu wprowadzimy nową zmienną w taką, że

$$w = \tan v. \quad (26)$$

Po zróżniczkowaniu (26) otrzymujemy

$$dw = \frac{dv}{\cos^2 v}. \quad (27)$$

Całka (25) po podstawieniu (26) i (27) przyjmie postać

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{\cos^2 v dw}{(1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v)^k} = \int \frac{\frac{1}{1 + \tan^2 v}}{\left(1 + \tan^2 u_0 \frac{1}{1 + \tan^2 v}\right)^k} dw = \\ &= \int \frac{\frac{1}{1 + w^2}}{\left(1 + \tan^2 u_0 \frac{1}{1 + w^2}\right)^k} dw = \int \frac{1}{(1 + w^2) \left(\frac{1 + w^2 + \tan^2 u_0}{1 + w^2}\right)^k} dw = \\ &= \int \frac{(1 + w^2)^{k-1}}{\left(\frac{1}{\cos^2 u_0} + w^2\right)^k} dw. \end{aligned} \quad (28)$$

Występujące w liczniku (28) wyrażenie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (1 + w)^{k-1} &= \left(1 - \frac{1}{\cos^2 u_0} + \frac{1}{\cos^2 u_0} + w^2\right)^{k-1} = \left(\left(\frac{1}{\cos^2} + w^2\right) - \tan^2 u_0\right)^{k-1} = \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \tan^{2r} u_0 \left(\frac{1}{\cos^2 u_0} + w^2\right)^{k-r-1} \end{aligned} \quad (29)$$

Po wprowadzeniu (29) do (28) otrzymujemy zależność

$$J_k = \int \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \tan^{2r} u_0 \left(\frac{1}{\cos^2 u_0} + w^2 \right)^{k-r-1} dw = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \tan^{2r} u_0 J_{r+1}, \quad (30)$$

gdzie

$$J_r = \int \frac{dw}{\left(\frac{1}{\cos^2 u_0} + w^2 \right)^r}. \quad (31)$$

Całkę (31) możemy rozwiązać na podstawie wzoru rekurencyjnego (Fichtenholtz, 1962)

$$J_{m+1} = \frac{\cos^2 u_0}{2m} \frac{w \cos^{2m} u_0}{(w^2 \cos^2 u_0 + 1)^m} + J_m \frac{2m-1}{2r} \cos^2 u_0. \quad (32)$$

Stosując wzór (32) do całki (31) otrzymujemy zależność w postaci

$$J_{r+1} = \frac{1}{2rp^2} \frac{w}{(w^2 + p^2)^r} + \frac{2r-1}{2rp^2} J_r, \quad (33)$$

gdzie

$$p = \frac{1}{\cos u_0}.$$

Wyraz J_r w (5.36) dla $r=1$ przyjmuje startową formę

$$J_1 = \cos u_0 \arctan (w \cos u_0). \quad (34)$$

Osobliwości układu Soldnera na elipsoidzie

Na podstawie wzoru (21)

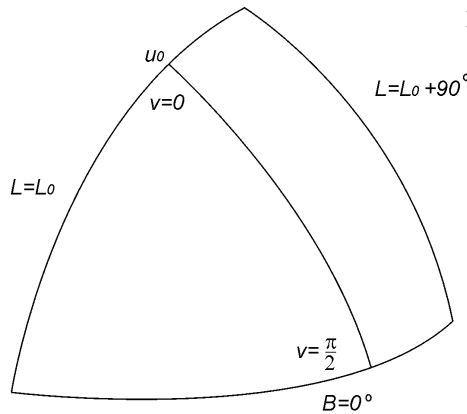
$$L - L_0 = \int \sqrt{1 - \frac{e^2}{1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v}} dv,$$

gdzie $\cos v = \cot u_0 \tan u$, obliczamy granice

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \cos v = \lim_{u \rightarrow u_0} \cot u_0 \tan u = 1 \Rightarrow v = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \cos v = \lim_{u \rightarrow 0} \cot u_0 \tan u = 0 \Rightarrow v = \frac{\pi}{2}$$

Oznacza to, że parametr v przyjmuje wartość $v=0$ przy $u \rightarrow u_0$ oraz $v = \frac{\pi}{2}$ przy $u \rightarrow 0$ (rys.5).

Rys. 5. Określenie wartości parametru v

Ponieważ granica mianownika (21)

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} (1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v(u_0)) = 1$$

to

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} (L - L_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{e^2}{1}} dv = v \sqrt{1 - e^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - e^2}$$

Ponadto

$$\lim_{u_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 u_0 \cos^2 v(u_0)) = \infty$$

więc

$$\lim_{u_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} (L - L_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = v \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

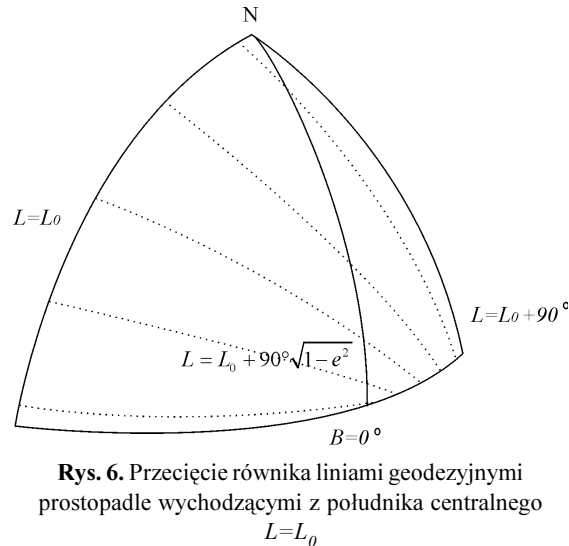
Z powyższych rozważań wynika, że wszystkie linie geodezyjne prostopadłe do wybranego południka centralnego na elipsoidzie przecinają równik na ograniczonym odcinku zawartym pomiędzy punktami o długościach geodezyjnych od $L = L_0 + 90^\circ \sqrt{1 - e^2}$ do $L = L_0 + 90^\circ$ (rys. 6).

Ten fragment odcinka równika można nazwać biegunem układu Soldnera na elipsoidzie.

W przypadku elipsoidy GRS 80 długość tego odcinka wynosi 33 591 m. Odcinki linii geodezyjnych ortogonalnych do południka centralnego mają różne długości licząc od punktu zwrotu do punktu przecięcia z równikiem. Długości tych odcinków rosną wraz ze wzrostem szerokości geodezyjnej punktu zwrotu. Dla punktu zwrotu leżącego na równiku odcinek linii geodezyjnej stanowi fragment równika liczony od południka $L = L_0$ do południka $L = L_0 + 90^\circ \sqrt{1 - e^2}$. W przypadku elipsoidy GRS80 długość tego odcinka równika liczona od południa centralnego $L = L_0 = 0^\circ$ do południka $L = L_0 + 90^\circ \sqrt{1 - e^2} = 89^\circ 41' 53,69''$ wynosi 9 985 163 m. Dla punktu zwrotu leżącego w biegunie układu geodezyjnego linia geodezyjna biegnie po południku $L = L_0 + 90^\circ$. Długość tego odcinka, czyli połowy południka wynosi 10 001 965 m.

Z powyższych rozważań wynika pewien problem w jednoznacznym określeniu przebiegu południków soldnerowskich, które przecinają równik pomiędzy długością geodezyjną $L = L_0 + 90^\circ$ a $L = L_0 + 90^\circ \sqrt{1 - e^2}$.

Południki te nie dadzą się w sposób jednoznaczny określić. Ostatnim południkiem soldnerowskim jednoznacznie wyznaczalnym na elipsoidzie jest ten, który przecina równik w punkcie o długości geodezyjnej $L = L_0 + 90^\circ \sqrt{1 - e^2}$ (rys.7).



Rys. 6. Przecięcie równika liniami geodezyjnymi prostopadle wychodzącymi z południka centralnego $L=L_0$



Rys. 7. Ilustracja przebiegu ostatniego jednoznacznie wyznaczonego południka soldnerowskiego

Badanie nieregularności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

W pracy (Pędzich, 2007) przedstawiono własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy. Pokazano m.in. rozkład zniekształceń odwzorowawczych oraz konstrukcję siatki kartograficznej w odwzorowaniu elipsoidy GRS80. Elipsoida GRS80 charakteryzuje się bardzo małym spłaszczeniem, dlatego pewne własności odwzorowania nie zostały tam w sposób szczegółowy uwidocznione.

Dla dokładnego zbadania i zobrazowania nieregularności występujących w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera należy przyjąć znacznie większe spłaszczenie (ewentualnie mimośród) elipsoidy. W niniejszym artykule dla dalszych badań przyjęto zatem mimośród $e=0,6$.

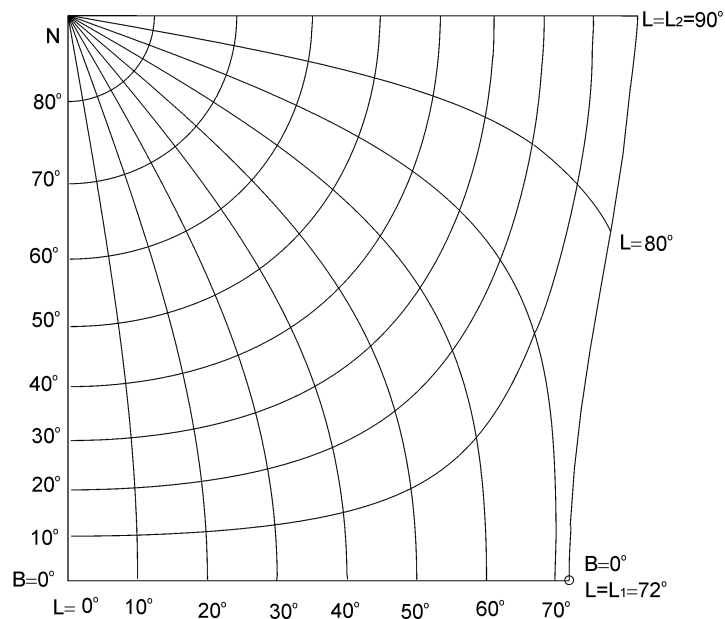
W odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera południk centralny $L=L_0$ i południk $L=L_0+180^\circ$ odwzorowują się na odcinek osi x układu współrzędnych prostokątnych płaskich. Pozostałe południki odwzorowują się na krzywe symetryczne względem obrazu południka centralne-

go. Równoleżniki odwzorowują się również na krzywe symetrycznie względem południka $L=L_0$.

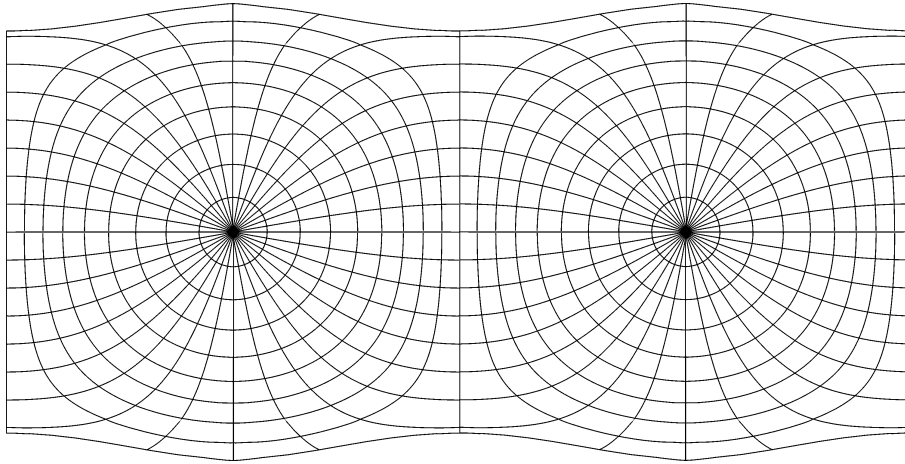
W odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera w sposób nieregularny odwzorowuje się równik.

Rozważania dotyczące przebiegu obrazu równika, możemy ograniczyć do płata elipsoidy zawartego pomiędzy południkami $L=L_0=0^\circ$ i $L=L_0+90^\circ=90^\circ$ oraz równikiem $B=0^\circ$. Wówczas zauważymy, że odcinek równika pomiędzy południkami L_0 a $L_1 = L_0 + 90^\circ\sqrt{1-e^2}$ odwzorowuje się na odcinek linii prostej. Natomiast fragment równika zawarty pomiędzy południkiem $L_1 = L_0 + 90^\circ\sqrt{1-e^2}$ a $L_2=L_0 + 90^\circ$ odwzorowuje się na pewną krzywą, stanowiącą brzeg siatki kartograficznej. Wynika to z podstawowej własności odwzorowania jaką jest równoodległościowe odwzorowanie linii geodezyjnych prostopadle wychodzących z południka centralnego $L=L_0$ na linie równoległe do osi y układu współrzędnych prostokątnych płaskich oraz przeprowadzonych w niniejszym artykule badań nad przebiegiem tych linii na elipsoidzie. Każdy południk o długości geodezyjnej od $L \in (L_1 = L_0 + 90^\circ\sqrt{1-e^2}, L_2 = L_0 + 90^\circ)$ odwzorowuje się na dwa odcinki łuków krzywych.

Przyjmując $L_0=0^\circ$ oraz $e=0,6$ otrzymujemy $L_1=72^\circ$ oraz $L_2=90^\circ$. Obraz płata elipsoidy dla $e=0,6$ ilustruje rysunek 8. Natomiast obraz całej elipsoidy przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 8. Nieregularny przebieg równika w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera, mimośród elipsoidy $e=0,6$

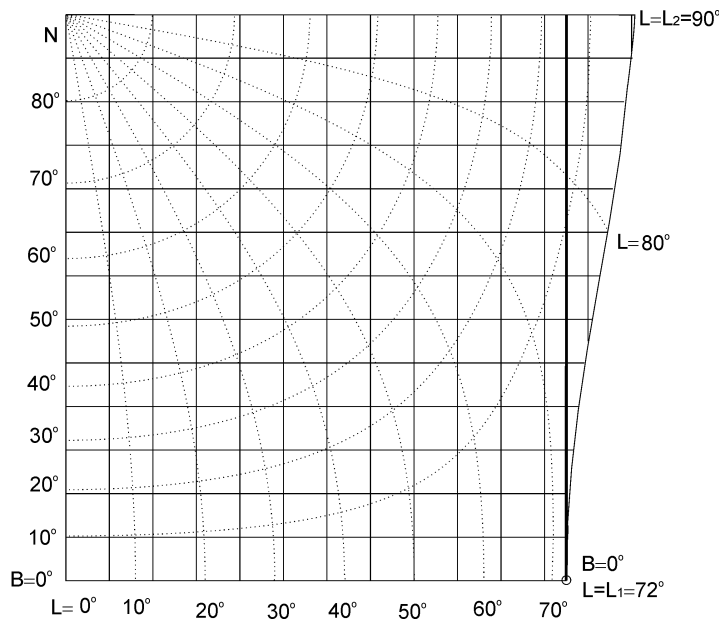


Rys. 9. Ilustracja siatki kartograficznej w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera (obrócona o 90°)

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera jest odwzorowaniem równoodległościowym w kierunku linii geodezyjnych prostopadle wychodzących z południka centralnego $L=L_0$, odwzorowujących się na linie proste równoległe do osi y układu współrzędnych prostokątnych płaskich. Południki soldnerowskie odwzorowują się na linie proste równoległe do osi x układu współrzędnych prostokątnych płaskich.

Obraz siatki układu Soldnera tworzy więc w płaszczyźnie odwzorowania siatkę prostokątną. Na rysunku 10 przedstawiono obraz tej siatki linią ciągłą na tle siatki kartograficznej zaznaczonej linią przerywaną. Linią pogrubioną zaznaczono obraz ostatniego jednoznacznie wyznaczalnego południka soldnerowskiego. Z rysunku widać, że w obszarze nieregularności możemy jedynie wyznaczyć fragmenty kolejnych południków soldnerowskich.

Rys. 10. Obraz siatki współrzędnych Soldnera wraz z obrazem ostatniego jednoznacznie wyznaczalnego południka soldnerowskiego



Podsumowanie

W artykule przedstawiono pewne osobliwości występujące w układzie współrzędnych Soldnera na elipsoidzie oraz wynikające z nich nieregularności obrazu całej elipsoidy w płaszczyźnie odwzorowania Cassiniego-Soldnera. Osobliwości te związane są z przecięciami pewnych linii geodezyjnych elipsoidy z równikiem. Występują one na odcinku równika elipsoidy stanowiącym tzw. biegun układu współrzędnych Soldnera. W odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera odcinek ten, tworzy brzeg siatki kartograficznej, odwzorowujący się nieregularnie.

Omówione w artykule osobliwości stanowią także rozwinięcie wiedzy na temat przebiegu linii geodezyjnej na elipsoidzie.

Literatura

- Fichtenholz G.M., 1962: Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa.
König R., Weise K., 1951: Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Berlin.
Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
Pędzich P., 2007: Opracowanie odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy oraz obszaru Polski w szerokiej strefie odwzorowawczej z zastosowaniem funkcji i całek eliptycznych Jacobiego, *Prace Naukowe Geodezja*, z. 42, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
Szpunar W., 1982: Podstawy geodezji wyższej, PPWK, Warszawa.

Abstract

In the paper, some peculiarities occurring in the Soldner coordinate system and irregularities in the image of an ellipsoid in the Cassini-Soldner projection are presented. The peculiarities relate from intersections of geodetic lines with equator. They appear on some section of equator, so called a pole of the Soldner coordinate system. In the Cassini-Soldner projection that section is projected in the irregular way and creates the edge of graticule.

dr hab. inż. Jerzy Balcerzak, prof. PW
j.balcerzak@gik.pw.edu.pl

dr hab. inż. Paweł Pędzich
p.pędzich@gik.pw.edu.pl