

**ZASTOSOWANIE ODWZOROWANIA
CASSINIEGO-SOLDNERA DO PRZEDSTAWIENIA
OBSZARU POLSKI W WĄSKICH LUB SZEROKICH
PASACH POŁUDNIKOWYCH**

UTILIZATION OF CASSINI-SOLDNER PROJECTIONS TO
PRESENTATION OF THE AREA OF POLAND
IN NARROW OR WIDE MERIDIANAL ZONES

Paweł Pędzich

Instytut Fotogrametrii i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, odwzorowanie Cassiniego-Soldnera, całki eliptyczne, funkcje eliptyczne Jacobiego

Keywords: mathematical cartography, map projections, Cassini-Soldner projection, elliptic integrals, Jacoby elliptic functions

Wstęp

W artykule przedstawiono własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera obszaru Polski w wąskich i szerokich strefach odwzorowawczych. Opisano dwie metody konstruowania tego odwzorowania. Pierwsza z nich wykorzystuje szeregi potęgowe i daje możliwość wyznaczenia współrzędnych prostokątnych płaskich i zniekształceń odwzorowawczych w wąskich, 3–4° strefach odwzorowawczych. Podstawą drugiej metody są całki i funkcje eliptyczne Jacobiego, których zastosowanie daje możliwość odwzorowania nawet całej elipsoidy.

W artykule zaprezentowano wyniki obliczeń zniekształceń odwzorowawczych długości, pól i kątów w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera. Przedstawiono analizy rozkładu zniekształceń z zastosowaniem metody izolinii. Porównano to odwzorowanie z odwzorowaniem Gaussa-Krügera powszechnie stosowanym w pracach geodezyjnych w Polsce.

Pojęcie współrzędnych Soldnera oraz odwzorowania Cassiniego-Soldnera

Współrzędne Soldnera η i ξ powierzchni elipsoidy

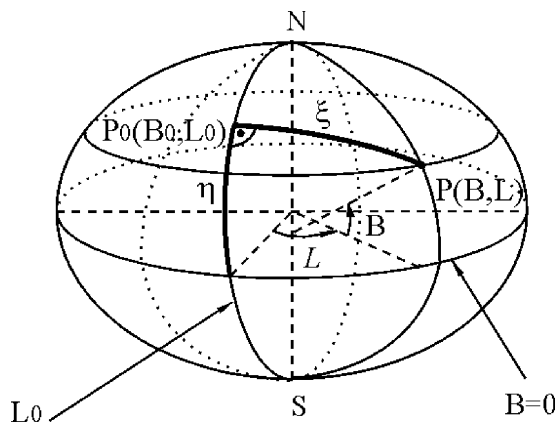
$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \left[\frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right]$$

$$(B, L) \in \omega = \left\{ (B, L) : B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), L \in (-\pi, \pi) \right\} \quad (1)$$

są zdefiniowane (rys. 1) jako:

η – długość łuku południka $L=L_0$ łączącego punkty $(B=0, L=L_0)$ i $P_0(B=B_0, L=L_0)$,

ξ – długość łuku linii geodezyjnej ortogonalnej do południka środkowego $L=L_0$ łączącego punkty $P_0(B_0, L_0)$ i $P(B, L)$, gdzie P_0 jest jej punktem zwrotu na południku $L=L_0$.



Rys.1. Współrzędne Soldnera na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej

Wyznaczenie tak określonych współrzędnych (η, ξ) Soldnera sprowadza się zatem do rozwiązania trzech zadań: wyznaczenia punktu zwrotu linii geodezyjnej $P_0(B_0, L_0)$ oraz długości łuku południka liczonej od równika do punktu zwrotu $P_0(B_0, L_0)$ i długości linii geodezyjnej liczonej od punktu zwrotu $P_0(B_0, L_0)$ do punktu $P(B, L)$.

Współrzędne prostokątne płaskie x, y w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera definiuje się wówczas jako

$$\vec{r}' = [x = \eta(B, L), y = \xi(B, L)] \quad (2)$$

Podstawowe własności metryczne odwzorowania Cassiniego-Soldnera

Ogólne własności metryczne odwzorowania Cassiniego-Soldnera są powszechnie znane i były szeroko opisywane w literaturze. Dla pełnego przedstawienia własności tego odwzorowania poniżej zamieszczono krótką ich charakterystykę.

Południk osiowy w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera odwzorowuje się izometrycznie – bez zniekształceń. Odwzorowanie to jest odwzorowaniem równoodległościowym w kierunku linii geodezyjnych prostopadle wychodzących z południka osiowego. Elementarna skala długości w kierunku tych linii jest równa jedności. Ogólnie rzecz biorąc lokalne zniekształcenia w miarę oddalania się od obrazu południka osiowego mają tendencję wzrastania.

Linie geodezyjne prostopadłe wychodzące z południka osiowego przecinają się na elipsoidzie z południkami Soldnera pod kątem prostym. Ich obrazy w odwzorowaniu także są wzajemnie prostopadłe. Na podstawie I. i II. twierdzenia Tissota wiemy, że krzywe te są krzywymi głównymi odwzorowania i wyznaczają kierunki ekstremalnych zniekształceń długości. Z tego wywodu wynika, że kierunek południka Soldnera będzie kierunkiem maksymalnych zniekształceń liniowych.

Kąt ekstremalnych zniekształceń długości w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera jest równy obrazowi kąta soldnerowskiej zbieżności południków.

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera elipsoidy obrotowej spłaszczonej w płaszczyznę w postaci rozwinięcia na szeregi potęgowe

Do wyznaczenia odwzorowania Cassiniego-Soldnera dotychczas stosowano wzory przybliżone w postaci szeregów potęgowych. Mają one zastosowanie w wąskich, 3–4° strefach południkowych. Zależności korzystające z kilku pierwszych wyrazów rozwinięcia w szeregi potęgowe odwzorowania Cassiniego-Soldnera (Snyder, 1987) mają następującą postać:

$$x = S - S_p + N \tan B \left[\frac{A^2}{2} + \frac{(5 - T + 6C)A^4}{24} \right] \quad (3)$$

$$y = N \left[\frac{A - TA^3}{6} - \frac{(8 - T + 8C)TA^5}{120} \right] \quad (4)$$

$$\mu = 1 + \frac{y^2 \cos^2 A_z (1 - e^2 \sin^2 B)^2}{2a^2 (1 - e^2)} \quad (5)$$

gdzie x, y oznaczają współrzędne prostokątne w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera, μ – elementarną skalę długości w funkcji kąta kierunkowego A_z liczonego na płaszczyźnie obrazu od osi x układu współrzędnych prostokątnych płaskich, oraz

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad T = \tan^2 B, \quad A = (L - L_0) \cos B, \quad C = \frac{e^2 \cos^2 B}{1 - e^2}, \quad (6)$$

$$S = A_0 B + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin 2rB \quad (7)$$

gdzie:

$$A_0 = a(1 - e^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{e}{2}\right)^{2k}$$

$$A_r = a(1 - e^2) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-1)^{+rk}}{r} \binom{-\frac{3}{2}}{k} \binom{2k}{k-r} \left(\frac{e}{2}\right)^{2k}$$

parametr S wyraża długość łuku południka środkowego liczoną od równika do równoleżnika o szerokości geodezyjnej B ; S_p jest natomiast wartością długości łuku południka środkowego liczoną od równika do punktu przecięcia z równoleżnikiem o szerokości geodezyjnej B_p stanowiącym początek układu współrzędnych xoy .

Z wzoru (5) widać, że dla $A_z = 0$ skala zniekształceń długości osiąga maksimum

$$\mu(A_z = 0) = \max = m = 1 + \frac{y^2 (1 - e^2 \sin^2 B)^2}{2a^2 (1 - e^2)} \quad (8)$$

natomiast dla $A_z = 90^\circ$ osiąga minimum

$$\mu(A_z = 90^\circ) = \min = n = 1. \quad (9)$$

Skala pól wyraża się jako

$$p = mn, \quad (10)$$

a ponieważ w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera wartość minimalnych skal długości $n=1$ to

$$p = m \quad (11)$$

Ekstremalne zniekształcenie kierunku

$$\tan \omega_{\beta_m} = \frac{m - n}{2\sqrt{mn}} \quad (12)$$

lecz ze względu na $n=1$ mamy

$$\tan \omega_{\beta_m} = \frac{m - 1}{2\sqrt{m}} \quad (13)$$

Zniekształcenie dowolnego kąta γ można oszacować na podstawie zależności

$$|\omega_\gamma| \leq 2 |\omega_{\beta_m}| \quad (14)$$

Wzory te można stosować w 3–4° strefach południkowych. W tabeli 1 zaprezentowano wyniki obliczeń współrzędnych prostokątnych płaskich x,y , maksymalnych skal długości $m = \mu(A_z = 0)$, zniekształceń względnych z_m , ekstremalnych zniekształceń kierunku ω oraz skali pól w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera z wykorzystaniem wzorów 3–13. Obliczenia przeprowadzono dla 4 stopniowej strefy z południkiem osiowym o długości geodezyjnej 19° . Z analizy otrzymanych wartości widać, że maksymalne zniekształcenia liniowe na krańcach strefy wynoszą ok. +26 cm/km, ekstremalne zniekształcenia kierunku ok. 1'. Możemy również konstruować strefy o podobnej wielkości dla innych wartości długości geodezyjnej południków osiowych. Własności metryczne tych stref pozostają niezmienione. Stąd dla obszaru Polski przebadano odwzorowanie Cassiniego-Soldnera tylko w jednej strefie cztero-stopniowej.

Tabela 1. Współrzędne prostokątne płaskie i skala maksymalnych zniekształceń długości w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera w 4° strefie odwzorowawczej

| <i>B</i> | <i>L</i> | <i>x</i> | <i>y</i> | <i>m</i> | <i>z_m</i> | <i>ω</i> | <i>p</i> |
|----------|----------|-------------|-------------|----------|----------------------|----------|----------|
| [°] | [°] | [m] | [m] | | [cm/km] | ['] | |
| 49 | 17 | 5431555.606 | -146326.656 | 1.000263 | 26,3 | 0,903936 | 1,000263 |
| 51 | 17 | 5653990.278 | -140378.133 | 1.000242 | 24,2 | 0,83154 | 1,000242 |
| 53 | 17 | 5876492.227 | -134257.058 | 1.000221 | 22,1 | 0,76026 | 1,000221 |
| 55 | 17 | 6099060.330 | -127970.816 | 1.000201 | 20,1 | 0,69042 | 1,000201 |
| 49 | 18 | 5430109.567 | -73169.677 | 1.000066 | 6,6 | 0,226008 | 1,000066 |
| 51 | 18 | 5652561.811 | -70195.525 | 1.000060 | 6,1 | 0,207912 | 1,000061 |
| 53 | 18 | 5875088.297 | -67135.052 | 1.000055 | 5,5 | 0,190092 | 1,000055 |
| 55 | 18 | 6097687.783 | -63991.949 | 1.000050 | 5,0 | 0,172632 | 1,00005 |
| 49 | 19 | 5429627.632 | 0.000 | 1.000000 | 0 | 0 | 1 |
| 51 | 19 | 5652085.722 | 0.000 | 1.000000 | 0 | 0 | 1 |
| 53 | 19 | 5874620.376 | 0.000 | 1.000000 | 0 | 0 | 1 |
| 55 | 19 | 6097230.313 | 0.000 | 1.000000 | 0 | 0 | 1 |
| 49 | 20 | 5430109.567 | 73169.677 | 1.000066 | 6,6 | 0,226008 | 1,000066 |
| 51 | 20 | 5652561.811 | 70195.525 | 1.000060 | 6,1 | 0,207912 | 1,000061 |
| 53 | 20 | 5875088.297 | 67135.052 | 1.000055 | 5,5 | 0,190092 | 1,000055 |
| 55 | 20 | 6097687.783 | 63991.949 | 1.000050 | 5,0 | 0,172632 | 1,00005 |
| 49 | 21 | 5431555.606 | 146326.656 | 1.000263 | 26,3 | 0,903936 | 1,000263 |
| 51 | 21 | 5653990.278 | 140378.133 | 1.000242 | 24,2 | 0,83154 | 1,000242 |
| 53 | 21 | 5876492.227 | 134257.058 | 1.000221 | 22,1 | 0,76026 | 1,000221 |
| 55 | 21 | 6099060.330 | 127970.816 | 1.000201 | 20,1 | 0,69042 | 1,000201 |

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera w szerokiej strefie odwzorowawczej z zastosowaniem całek i funkcji eliptycznych Jacobiego

Znane dotychczas metody konstruowania odwzorowania Cassiniego-Soldnera mają ograniczony zakres stosowalności. Odnoszą się albo do powierzchni sfery jako powierzchni oryginału w tym odwzorowaniu albo do wąskich stref odwzorowawczych powierzchni elipsoidy.

W celu poszerzenia zakresu stosowalności odwzorowania Cassiniego-Soldnera proponuje się użycie do jego konstrukcji funkcji i całek eliptycznych Jacobiego. Problem konstrukcji odwzorowania Cassiniego-Soldnera sprowadza się wówczas do wyrażenia poprzez całki i funkcje eliptyczne Jacobiego długości łuku południka osiowego odwzorowania oraz długości linii geodezyjnej, przechodzącej przez dany punkt $P(B, L)$ oraz przez jej punkt zwrotu $P_0(B_0, L_0)$ położony na południku osiowym, czyli do określenia tzw. współrzędnych Soldnera. Niezbędne jest więc wyznaczenie współrzędnych geodezyjnych, położonego na południku osiowym odwzorowania, punktu zwrotu analizowanej linii geodezyjnej przechodzącej przez zadany punkt P .

Wyznaczenie współrzędnych prostokątnych płaskich w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera z zastosowaniem całek i funkcji eliptycznych Jacobiego

Równanie elipsoidy obrotowej spłaszczonej we współrzędnych zredukowanych ma postać

$$\vec{r} = [x = a \cos u \cos L, y = a \cos u \sin L, z = b \sin u] \quad (15)$$

gdzie

$$\tan u = \sqrt{1 - e^2} \tan B \quad (16)$$

Współrzędne prostokątne płaskie w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera mają postać

$$\vec{r}' = [x = \eta(u, L), y = \xi(u, L)] \quad (17)$$

gdzie

η – długość łuku południka $L=L_0$ łączącego punkty $(B=0, L=L_0)$ i $P_0(B=B_0, L=L_0)$,
 ξ – długość łuku linii geodezyjnej ortogonalnej do południka osiowego, $L=L_0$ łączącej punkty $P_0(B_0, L_0)$ i $P(B, L)$, P_0 jest punktem zwrotu tej linii położonym na południku osiowym $L=L_0$.

Wielkości η , ξ można przedstawić za pomocą zależności (Panasiuk i inni, 1995)

$$\eta = a \left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - u_0, e\right) \right] \quad (18)$$

$$\xi = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0} \left(\left[\text{am}(w, k), k \right] \right) \quad (19)$$

gdzie symbolem E oznaczono całkę eliptyczną drugiego rodzaju Legendre'a w postaci normalnej, w której

$$\text{cn}(w, k) = \frac{\sin u}{\sin u_0}, \quad k = \frac{e' \sin u_0}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0}} \quad (20)$$

$\text{cn}(w, k)$ oznacza cosinus eliptyczny Jacobiego zmiennej w z parametrem k , natomiast $\text{am}(w, k)$ oznacza amplitudę zmiennej w z parametrem k .

Wyznaczenie punktu $P_0(u_0, L_0)$ zwrotu linii geodezyjnej, gdy dany jest punkt $P(u, L)$ leżący na rozważanej linii geodezyjnej oraz znana jest wartość różnicy długości geodezyjnych $\Delta L = L - L_0$ do punktu P_0 zwrotu tej linii, zasada się na określeniu równania linii geodezyjnej uzależnionego od jej punktu zwrotu $P_0(u_0, L_0)$.

Równanie linii geodezyjnej we współrzędnych zredukowanych u, L na powierzchni elipsoidy określonej równaniem (15) można zapisać w postaci (Panasiuk i inni, 1995)

$$L - L_0 = v + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} J_k \quad (21)$$

$$J_k = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \tan^{2r} u_0 J_{r+1} \quad (22)$$

$$J_{r+1} = \frac{1}{2rp^2} \frac{w}{(w^2 + p^2)^r} + \frac{2r-1}{2rp^2} J_r \quad (23)$$

gdzie $\cos v = \cot u_0 \tan u$, $w = \tan v$, $p = \frac{1}{\cos u_0}$.

Wyraz J_r w (23) dla $r=1$ przyjmuje początkową postać

$$J_1 = \cos u_0 \arctan(w \cos u_0) \quad (24)$$

Wyznaczenie szerokości geodezyjnej zredukowanej punktu zwrotu linii geodezyjnej przechodzącej przez punkt $P(u, L)$, można przeprowadzić metodą iteracyjną na podstawie zależności (21), (22), (23) i (24). Za początkowe przybliżenie wartości u_0 można przyjąć

$$u_0(0) = \arccot(\cos(L - L_0) \cot u) \quad (25)$$

Szerokość zredukowaną u_0 punktu zwrotu można również wyznaczyć metodą iteracyjną w oparciu o następujące równanie linii geodezyjnej (Panasiuk, Rychlik, 1981)

$$L - L_0 = p \left(\Pi \left(q, n, \frac{\pi}{2} \right) - \Pi(q, n, \beta) \right) \quad (26)$$

gdzie

$$p = \frac{\left(1 - \frac{k^2}{\tau^2}\right) \tau}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad q = \frac{k}{\tau}, \quad n = \frac{k}{\tau} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{1 - k^2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\tau^2}} \sin v}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\tau^2} \sin^2 v}}, \quad k = \sin u_c$$

$$\tau = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_0}$$

oraz

$$\Pi(q, n, \beta) = \int_0^\beta \frac{d\beta}{(1 - q^2 \sin^2 \beta) \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta}} \quad \text{jest całką eliptyczną trzeciego rodzaju.}$$

Zniekształcenia odwzorawcze w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera obszaru Polski w szerokiej strefie odwzorawczej

Elementarna skala długości w odwzorowaniu elipsoidy w płaszczyznę ma postać

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_B \cos A + \vec{\mu}_L \sin A \quad (27)$$

gdzie

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{r}'_B}{M}, \quad \vec{\mu}_L = \frac{\vec{r}'_L}{N \cos B}, \quad (28)$$

$$\vec{r}'_B = [x_B, y_B], \quad \vec{r}'_L = [x_B, y_B].$$

Kąt $A_e, A_c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ekstremalnych zniekształceń można wyznaczyć ze wzoru

$$\tan 2A_e = \frac{2Q}{P - R} \quad (29)$$

gdzie

$$P = \frac{E'}{M^2}, \quad Q = \frac{F'}{MN \cos B}, \quad R = \frac{G'}{N^2 \cos^2 B}, \quad E' = |\vec{r}'_B|^2, \quad F' = \vec{r}'_B \cdot \vec{r}'_L, \quad G' = |\vec{r}'_L|^2.$$

Ekstremalne skale długości mają postać:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \vec{\mu}_B \cos A_e + \vec{\mu}_L \sin A_e \\ \vec{n} &= -\vec{\mu}_B \sin A_e + \vec{\mu}_L \cos A_e \end{aligned} \quad (30)$$

Moduł $|\vec{m}|$ wyznacza maksymalne zniekształcenia długości w kierunku A_e tj. południka Soldnera, a $|\vec{n}| = 1$ minimalne w kierunku stosownych linii geodezyjnych.

Skala pół oraz ekstremalne zniekształcenie kierunku przedstawiają wzory (11), (13).

Podstawą wyznaczania zniekształceń odwzorowawczych jest określenie pochodnych cząstkowych funkcji (17) tj.

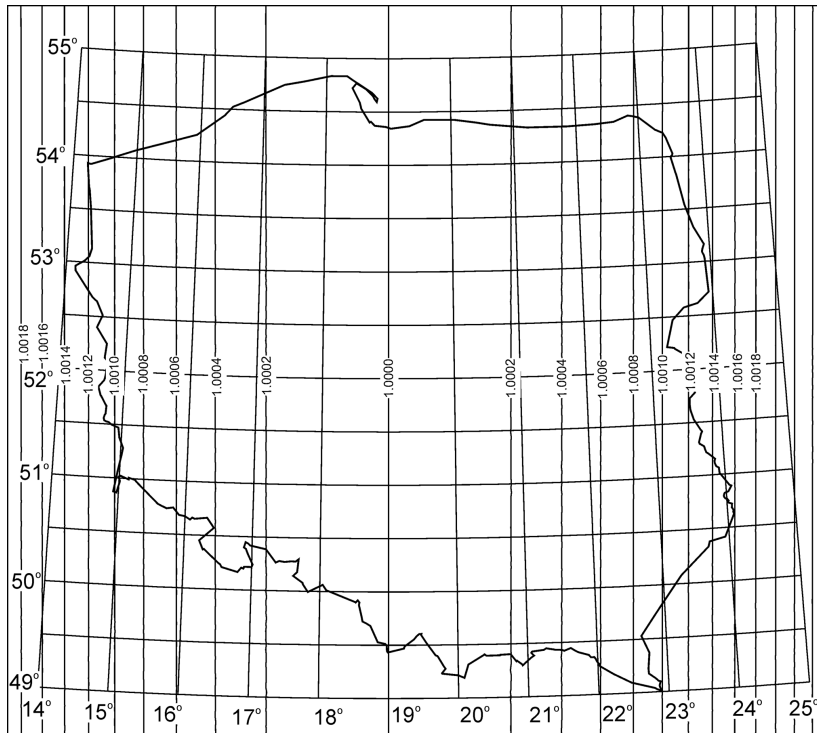
$$\vec{r}'_B = [x_B, y_B], \quad \vec{r}'_L = [x_L, y_L]. \quad (31)$$

Pochodne cząstkowe w (31) możemy na ogół wyznaczać w sposób ścisły (Pędzich, 2005), lecz w przypadku skomplikowanych funkcji odwzorowawczych można je wyznaczyć także numerycznie.

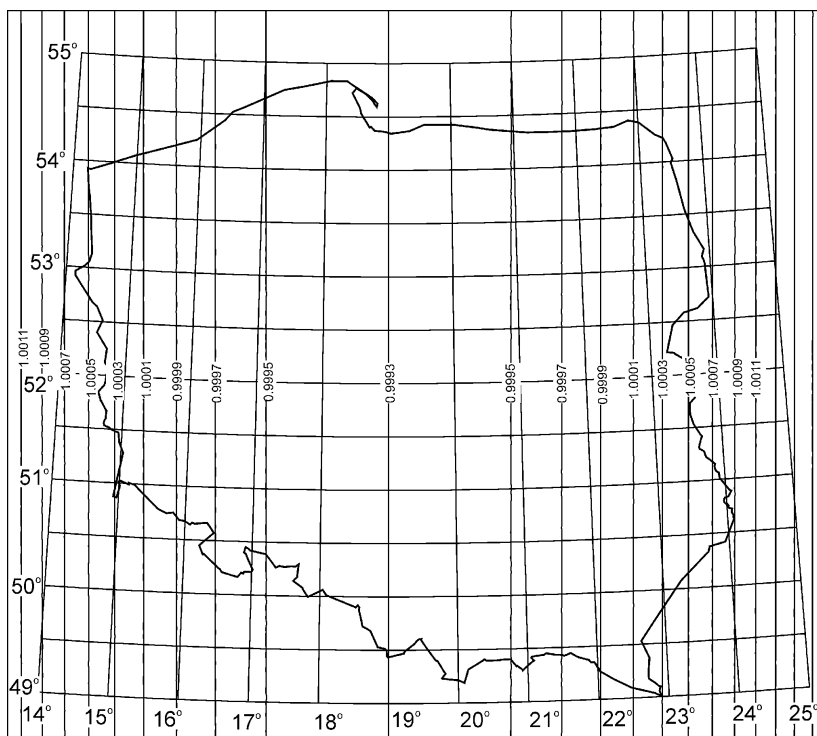
Stosując wzory (15)–(31) wyznaczono odwzorowanie Cassiniego-Soldnera dla obszaru Polski. Dla strefy 11-stopniowej ograniczonej południkami 14° i 25° obejmującej obszar Polski wyznaczono zniekształcenia odwzorowawcze. Obliczono wartości maksymalnych skal długości oraz ekstremalnych zniekształceń kątów (tab. 2). Minimalne skale długości są równe jedności w każdym punkcie odwzorowania. Wartości skal pół są równe wartościom maksymalnych skal długości. Na rysunku 2 zaprezentowano izolinie zniekształceń długości w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera Polski w szerokiej strefie. Na południku osiowym $L_0=19^\circ$ skala długości jest równa 1 (brak zniekształceń), w miarę oddalania od południka osiowego skala rośnie i osiąga wartość maksymalną 1,0016 (1,6 m/km) na wschodniej granicy Polski. Największe zmiany gradientu skali zniekształceń długości występują na południowych krańcach obszaru Polski.

Tabela 2. Zniekształcenia odwzorowawcze w odwzorowaniu Cassinio-Soldnera

| <i>B</i> | <i>L</i> | <i>X</i> | <i>Y</i> | <i>m</i> | <i>z_m</i> | <i>ω</i> | <i>p</i> |
|----------|----------|-------------|-------------|----------|----------------------|----------|----------|
| [°] | [°] | [m] | [m] | | [cm/km] | ['] | |
| 49 | 14 | 5441687,663 | -365594,182 | 1,001644 | 164,4 | 5,645232 | 1,001644 |
| 51 | 14 | 5663997,952 | -350719,069 | 1,001512 | 151,2 | 5,192568 | 1,001512 |
| 53 | 14 | 5886326,778 | -335414,145 | 1,001382 | 138,2 | 4,746912 | 1,001382 |
| 55 | 14 | 6108673,868 | -319697,932 | 1,001255 | 125,5 | 4,310376 | 1,001255 |
| 49 | 15 | 5437343,255 | -292551,657 | 1,001052 | 105,2 | 3,614148 | 1,001052 |
| 51 | 15 | 5659707,148 | -280652,868 | 1,000968 | 96,8 | 3,324504 | 1,000968 |
| 53 | 15 | 5882110,463 | -268409,692 | 1,000885 | 88,5 | 3,039312 | 1,000885 |
| 55 | 15 | 6104552,558 | -255836,925 | 1,000803 | 80,3 | 2,75994 | 1,000803 |
| 49 | 16 | 5433966,446 | -219458,227 | 1,000592 | 59,2 | 2,033484 | 1,000592 |
| 51 | 16 | 5656371,723 | -210534,897 | 1,000544 | 54,4 | 1,870584 | 1,000544 |
| 53 | 16 | 5878832,67 | -201352,963 | 1,000498 | 49,8 | 1,71018 | 1,000498 |
| 55 | 16 | 6101348,362 | -191923,51 | 1,000452 | 45,2 | 1,55304 | 1,000452 |
| 49 | 17 | 5431555,605 | -146326,656 | 1,000263 | 26,3 | 0,903936 | 1,000263 |
| 51 | 17 | 5653990,278 | -140378,133 | 1,000242 | 24,2 | 0,83154 | 1,000242 |
| 53 | 17 | 5876492,227 | -134257,058 | 1,000221 | 22,1 | 0,76026 | 1,000221 |
| 55 | 17 | 6099060,33 | -127970,816 | 1,000201 | 20,1 | 0,69042 | 1,000201 |
| 49 | 18 | 5430109,567 | -73169,6773 | 1,000066 | 6,6 | 0,226008 | 1,000066 |
| 51 | 18 | 5652561,811 | -70195,5251 | 1,000061 | 6,1 | 0,207912 | 1,000061 |
| 53 | 18 | 5875088,297 | -67135,0524 | 1,000055 | 5,5 | 0,190092 | 1,000055 |
| 55 | 18 | 6097687,783 | -63991,9491 | 1,00005 | 5,0 | 0,172632 | 1,00005 |
| 49 | 19 | 5429627,632 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 51 | 19 | 5652085,722 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 53 | 19 | 5874620,376 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 55 | 19 | 6097230,313 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 49 | 20 | 5430109,567 | 73169,6773 | 1,000066 | 6,6 | 0,226008 | 1,000066 |
| 51 | 20 | 5652561,811 | 70195,5251 | 1,000061 | 6,1 | 0,207912 | 1,000061 |
| 53 | 20 | 5875088,297 | 67135,0524 | 1,000055 | 5,5 | 0,190092 | 1,000055 |
| 55 | 20 | 6097687,783 | 63991,9491 | 1,00005 | 5,0 | 0,172632 | 1,00005 |
| 49 | 21 | 5431555,605 | 146326,656 | 1,000263 | 26,3 | 0,903936 | 1,000263 |
| 51 | 21 | 5653990,278 | 140378,133 | 1,000242 | 24,2 | 0,83154 | 1,000242 |
| 53 | 21 | 5876492,227 | 134257,058 | 1,000221 | 22,1 | 0,76026 | 1,000221 |
| 55 | 21 | 6099060,33 | 127970,816 | 1,000201 | 20,1 | 0,69042 | 1,000201 |
| 49 | 22 | 5433966,446 | 219458,227 | 1,000592 | 59,2 | 2,033484 | 1,000592 |
| 51 | 22 | 5656371,723 | 210534,897 | 1,000544 | 54,4 | 1,870584 | 1,000544 |
| 53 | 22 | 5878832,67 | 201352,963 | 1,000498 | 49,8 | 1,71018 | 1,000498 |
| 55 | 22 | 6101348,362 | 191923,51 | 1,000452 | 45,2 | 1,55304 | 1,000452 |
| 49 | 23 | 5437343,255 | 292551,657 | 1,001052 | 105,2 | 3,614148 | 1,001052 |
| 51 | 23 | 5659707,148 | 280652,868 | 1,000968 | 96,8 | 3,324504 | 1,000968 |
| 53 | 23 | 5882110,463 | 268409,692 | 1,000885 | 88,5 | 3,039312 | 1,000885 |
| 55 | 23 | 6104552,558 | 255836,925 | 1,000803 | 80,3 | 2,75994 | 1,000803 |
| 49 | 24 | 5441687,663 | 365594,182 | 1,001644 | 164,4 | 5,645232 | 1,001644 |
| 51 | 24 | 5663997,952 | 350719,069 | 1,001512 | 151,2 | 5,192568 | 1,001512 |
| 53 | 24 | 5886326,778 | 335414,145 | 1,001382 | 138,2 | 4,746912 | 1,001382 |
| 55 | 24 | 6108673,868 | 319697,932 | 1,001255 | 125,5 | 4,310376 | 1,001255 |



Rys. 2. Izoskale maksymalnych zniekształceń długości w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera na obszarze Polski



Rys. 3. Izoskale maksymalnych zniekształceń długości w zmodyfikowanym odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera na obszarze Polski

Z analizy rysunku 2 oraz tabeli 2 widać, że w strefach 4-stopniowych otrzymano maksymalne zniekształcenia rzędu 20 cm/km. Zwiększenie strefy do 6 stopni powoduje zwiększenie maksymalnych zniekształceń długości do 60 cm/km.

W otrzymanym odwzorowaniu możemy względnie zmniejszyć wartości zniekształceń długości o ok. połowę poprzez pomnożenie współrzędnej x przez współczynnik równy 0.9993. Otrzymamy wówczas zmodyfikowane odwzorowanie Cassiniego-Soldnera. Rozkład maksymalnych zniekształceń długości pokazano na rysunku 3. Widzimy, że jest on bardzo zbliżony do rozkładu zniekształceń długości w odwzorowaniu jednostrefowym Gaussa-Krügera zastosowanym w układzie „1992”.

W wąskich strefach odwzorowawczych 3–4-stopniowych można stosować wzory uproszczone (3)–(7). W tabeli 1 przedstawiono wyniki obliczeń współrzędnych prostokątnych płaskich oraz zniekształceń odwzorowawczych dla strefy czterostopniowej z południkiem osiowym $L_0=19^\circ$. Z porównania uzyskanych wyników zawartych w tabelach 1 i 2 stwierdzamy niewielkie różnice, rzędu 1mm, pomiędzy wartościami obliczonych współrzędnych w strefie czterostopniowej oraz niewielkie różnice pomiędzy zniekształceniami.

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera jest odwzorowaniem równoodległościowym. W odwzorowaniu tym występują zniekształcenia długości, kątów i pól. Porównując odwzorowanie Cassiniego-Soldnera z odwzorowaniem Gaussa-Krügera w szerokiej 10° strefie, możemy stwierdzić, że posiadają one zbliżone wartości maksymalnych zniekształceń długości. Odwzorowanie Gaussa-Krügera jest odwzorowaniem konforemnym, nie występują zniekształcenia kątowe. Natomiast w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera maksymalne zniekształcenia kątów w szerokiej strefie odwzorowawczej (jedenastostopniowej), obejmującej obszar Polski, osiągają prawie $6'$ a w strefach czterostopniowych około $1'$.

Odwzorowanie Gaussa-Krügera cechuje się większymi zniekształceniami pól w stosunku do odwzorowania Cassiniego-Soldnera. Zależność pomiędzy skalami zniekształceń pól w odwzorowaniu Gaussa-Krügera i Cassiniego-Soldnera dla obszaru Polski w przybliżeniu wyraża się zależnością $p_{C-S} \approx \sqrt{p_{G-K}}$. Wynika to stąd, że skala zniekształceń pól w odwzorowaniu Gaussa-Krügera $p_{G-K} = m^2$, a w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera $p_{C-S} = mn = m \cdot 1 = m$ oraz, jak na to wskazują wyniki obliczeń, wartości skal maksymalnych zniekształceń długości na obszarze Polski są w obydwu odwzorowaniach bardzo zbliżone.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera obszaru Polski w szerokich i wąskich strefach odwzorowawczych. Przedstawiono dwie metody wyznaczania współrzędnych prostokątnych płaskich w tym odwzorowaniu: jedna w postaci rozwinięcia w szeregi potęgowe i druga w postaci całek eliptycznych.

Przedstawiono wyniki obliczeń zniekształceń odwzorowawczych długości, kątów i pól w tym odwzorowaniu. Dokonano analizy zmian wartości zniekształceń odwzorowawczych wraz ze wzrostem szerokości strefy odwzorowawczej. Porównano uzyskane w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera zniekształcenia odwzorowawcze z wartościami zniekształceń występujących w odwzorowaniu Gaussa-Krügera. Pokazano, że wartości maksymalnych zniekształceń długości są zbliżone do wartości zniekształceń długości otrzymanych w od-

wzorowaniu Gaussa-Krügera. Ponadto wykazano, że zniekształcenia pól w odwzorowaniu Gaussa-Krügera są w przybliżeniu równe kwadratowi wartości zniekształceń pól w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera. Natomiast w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera występują dość duże zniekształcenia kątów.

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera stanowiło przez wiele lat podstawę tworzenia map wielkoskalowych i topograficznych w wielu państwach świata, w tym również na ziemiach polskich. Aktualnie odwzorowanie o nazwie Cassiniego-Soldnera stosowane jest do tworzenia wielkoskalowych map ograniczonych obszarów w takich krajach jak Cypr, Czechy, Dania, Niemcy, Słowacja, Malezja (Snyder, 1987) i dlatego ze względu na poznawczy aspekt warte jest bliższego analitycznego badania.

Ze względu na wartość zniekształceń kątowych odwzorowanie to nie zachowuje lokalnego podobieństwa odwzorowywanych figur. Kartometryczne wykorzystywanie tego odwzorowania wymaga stosowania specjalizowanych algorytmów uwzględniających redukcje odwzorowawcze; może mieć zastosowanie w zaawansowanych informatycznie aplikacjach całościowo rozwiązujących problemy geodezyjne i kartograficzne. Ze względu na obserwowany rozwój informatyki tworzenie takich aplikacji jest obecnie możliwe.

Literatura

- Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Pędzich P., 2005: The Soldner projection of the whole ellipsoid, XXII International Cartographic Conference, La Coruna.
- Panasiuk J., Rychlik M., 1981: Układ współrzędnych półgeodezyjnych w położeniu poprzecznym na powierzchni elipsoidy obrotowej spłaszczonej, *Geodezja i Kartografia*, Tom XXX, zeszyt 2, PWN.
- Snyder J.P., 1987: Map projections – a working manual, United States Government Printing Office, Washington.

Summary

In the paper, properties of the Cassini-Soldner projection of the area of Poland in narrow and wide zones are presented. Two methods of coordinates calculation in that projection are described: the first one is based on power series and it enables to determine flat rectangular coordinates and projection distortions in narrow – 3–4° projection zones and the second method uses elliptic integrals, which enables to project the area of Poland in one wide zone and even the whole ellipsoid. Moreover, results of calculation of linear, angular and area distortions in the Cassini-Soldner projection are presented. A comparison between Cassini-Soldner and generally used in Poland in geodetic works Gauss-Krüger projection are made. In the area of Poland linear distortions are similar in these two projections; area distortions in Cassini-Soldner projection are much smaller than in Gauss-Krüger projection but there are considerable angular distortions.

dr inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel. (022) 660 55 90