POLSKIE TOWARZYSTWO INFORMACJI PRZESTRZENNEJ
ROCZNIKI GEOMATYKI 2007 ❍ TOM V ❍ ZESZYT 3

O PEWNEJ NUMERYCZNEJ METODZIE GENEROWANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW W ODWZOROWANIACH KONFOREMNYCH

THE NUMERICAL METHOD OF CALCULATING COEFFICIENTS IN CONFORMAL PROJECTIONS

Paweł Pędzich

Instytut Fotogrametrii i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: odwzorowania konforemne, równania Eulera-Urmajewa
Keywords: conformal projections, Euler-Urmayev equations

Wstęp

Odwzorowania kartograficzne konforemne są powszechnie stosowane w geodezji i kartografii do tworzenia map zasadniczych, ewidencyjnych, topograficznych i przeglądowo-topograficznych. Wykorzystywane są m.in. odwzorowania Gaussa-Krügera, Roussilhe'a, stożkowe Lamberta. Do realizacji tych odwzorowań stosuje się wiele różnych, czasem bardzo skomplikowanych wzorów. Dlatego też ciekawe wydaje się podjęcie próby stworzenia uniwersalnego algorytmu pozwalającego na tworzenie odwzorowań w oparciu o zadane z góry własności dotyczące rozkładu zniekształceń, np. konformeności, równopolowości, czy też sposobu odwzorowania określonych linii. Na przeciw temu wyzwaniu wychodzą równania Eulera-Urmajewa, które stanowią podstawę tzw. klasyfikacji genetycznej odwzorowań kartograficznych. Rozwiązanie tych równań pozwala na otrzymanie dowolnych odwzorowań kartograficznych o z góry określonych własnościach.

W artykule przedstawiono metodę numeryczną rozwiązania równań różniczkowych Eulera-Urmajewa w odniesieniu do odwzorowań konforemnych. Opisany w artykule algorytm pozwala na aproksymację wybranych odwzorowań kartograficznych w ograniczonym obszarze powierzchni elipsoidy. Przykłady tych odwzorowań zostaną szczegółowo przedstawione.

Równania różniczkowe Eulera-Urmajewa i ich zastosowanie do tworzenia odwzorowań konforemnych

Odwzorowanie kartograficzne powierzchni elipsoidy obrotowej o równaniu

$$\vec{r} = \vec{r}\left(B,l\right) = \left[\frac{a\cos B\cos l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \frac{a\cos B\sin l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \frac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right]$$

$$\left(B,l\right) \in \omega = \left\{\left(B,l\right): B \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), l \in \left(-\pi,\pi\right)\right\}, l = L - L_0, L_0 = const \tag{1}$$

w płaszczyznę, można zapisać w postaci funkcji wektorowej

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}\left(B,l\right) = \left[x = x\left(B,l\right), y = y\left(B,l\right)\right] \tag{2}$$

Pochodne cząstkowe funkcji (2) względem parametrów B i L przyjmują następującą postać

$$\vec{\tau}_B = \left[x_B, y_B\right], \qquad \vec{\tau}_L = \left[x_L, y_L\right] \tag{3}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\mu = \left|\vec{\tau}_B\right| = \sqrt{x_B^{\ 2} + y_B^{\ 2}}, \quad \nu = \left|\vec{\tau}_L\right| = \sqrt{x_L^{\ 2} + y_L^{\ 2}}$$

wektory pochodnych cząstkowych $\vec{\tau}_B$ i $\vec{\tau}_L$(3) można rozłożyć na składowe

$$\vec{\tau}_B = \begin{Bmatrix} x_B = \mu\cos\gamma \\ y_B = \mu\sin\gamma \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{\tau}_L = \begin{Bmatrix} x_L = \nu\cos\left(90^o + \gamma + \varepsilon\right) = -\nu\sin\left(\gamma + \varepsilon\right) \\ y_L = \nu\sin\left(90^o + \gamma + \varepsilon\right) = \nu\cos\left(\gamma + \varepsilon\right) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

gdzie

$$\mu = \left|\vec{\tau}_B\right|, \quad \nu = \left|\vec{\tau}_L\right|, \quad \gamma = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right)$$

$$\theta' = \angle\left(\vec{\tau}_B, \vec{\tau}_L\right) = 90^o + \varepsilon, \quad \varepsilon = \theta' - \frac{\pi}{2}$$

Kąt zbieżności południków γ liczony jest od osi x.

Układ równań (4), (5) jest całkowalny tylko wtedy, gdy spełniony jest układ warunków

$$\left(x_B\right)_L = \left(x_L\right)_B, \quad \left(y_B\right)_L = \left(y_L\right)_B \tag{6}$$

Sprawdzenie uwarunkowań (6) wymaga obliczenia z (4) i (5) drugich pochodnych cząstkowych

$$\begin{aligned}(x_B)_L &= \mu_L \cos\gamma - \mu\gamma_L \sin\gamma \\ (y_B)_L &= \mu_L \sin\gamma + \mu\gamma_L \cos\gamma\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(x_L)_B &= -\left[\nu_B \sin(\gamma+\varepsilon) + \nu(\gamma_B + \varepsilon_B)\cos(\gamma+\varepsilon)\right] \\ (y_L)_B &= \nu_B \cos(\gamma+\varepsilon) - \nu(\gamma_B + \varepsilon_B)\sin(\gamma+\varepsilon)\end{aligned} \tag{8}$$

Z równań (1.6) po uwzględnieniu (1.7), (1.8) wynika układ równań liniowych

$$\begin{aligned}\gamma_B\left(\nu\cos(\gamma+\varepsilon)\right) + \gamma_L\left(-\mu\sin\gamma\right) &= -\mu_L\cos\gamma - \nu_B\sin(\gamma+\varepsilon) - \nu\varepsilon_B\cos(\gamma+\varepsilon) \\ \gamma_B\left(\nu\sin(\gamma+\varepsilon)\right) + \gamma_L\left(\mu\cos\gamma\right) &= -\mu_L\sin\gamma + \nu_B\cos(\gamma+\varepsilon) - \nu\varepsilon_B\sin(\gamma+\varepsilon)\end{aligned} \tag{9}$$

W wyniku rozwiązania układu równań (9) ze względu na niewiadome γ_B i γ_L otrzymujemy

$$\gamma_B = \frac{-\mu\mu_L - \mu\nu_B\sin\varepsilon - \mu\nu\varepsilon_B\cos\varepsilon}{\mu\nu\cos\varepsilon} = -\varepsilon_B - \frac{\mu_L}{\nu\cos\varepsilon} - \frac{\nu_B}{\nu}\tan\varepsilon$$

$$\gamma_L = \frac{\nu\mu_L\sin\varepsilon + \nu\nu_B}{\mu\nu\cos\varepsilon} = \frac{\mu_L}{\mu}\tan\varepsilon + \frac{\nu_B}{\mu\cos\varepsilon} \tag{10}$$

Są to tzw. równania Eulera-Urmajewa stanowiące podstawę tzw. klasyfikacji genetycznej odwzorowań kartograficznych (Balcerzak, Panasiuk, 2005).

W układzie równań (10) występują cztery dowolne funkcje: $\mu, \nu, \gamma, \varepsilon$ oraz ich pochodne cząstkowe. Klasyfikacja wynika z warunków nakładanych na układ funkcji (10).

Jeżeli odwzorowanie kartograficzne odniesione jest do siatki kartograficznej podwójnie ortogonalnej, to wówczas $\varepsilon = 0$. W tym przypadku związki (10) upraszczają się do postaci

$$\gamma_B = -\frac{\mu_L}{\nu}, \quad \gamma_L = \frac{\nu_B}{\mu} \tag{11}$$

Jeżeli rozważane odwzorowanie jest konforemne

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(q,l) = \left[x = x(q,l), y = y(q,l)\right] \tag{12}$$

gdzie

$$q = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin B}{1 + e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}} \tag{13}$$

jest szerokością izometryczną na elipsoidzie oraz $l=L-L_0$, wówczas $\mu = \nu$ i związki (10) jeszcze bardziej upraszczają się przyjmując formę

$$\gamma_q = -(\ln\mu)_L, \quad \gamma_L = (\ln\mu)_q \tag{14}$$

Z równań różniczkowych (14) wynika, że kąt zbieżności południków γ w odwzorowaniu kartograficznym konformenym spełnia równanie Laplace'a

$$\gamma_{LL} + \gamma_{qq} = 0 \tag{15}$$

Kąt zbieżności południków γ i $\ln\mu$ w odwzorowaniu kartograficznym konforemnym, wyrażają się przez funkcje harmoniczne zmiennych q i L.

Znalezienie funkcji odwzorowawczych $x = x(q,l)$, $y = y(q,l)$ wymaga rozwiązania jednego z układów równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_q &= \begin{Bmatrix} x_q = \mu\cos\gamma \\ y_q = \mu\sin\gamma \end{Bmatrix} \\ \vec{\tau}_l &= \begin{Bmatrix} x_l = -\mu\sin\gamma \\ y_l = \mu\cos\gamma \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

Aproksymacja odwzorowań konforemnych za pomocą wielomianów harmonicznych

Poszukiwanie odwzorowań konforemnych (12) spełniających warunek izometryczności odwzorowania określonych linii, w pierwszym etapie sprowadza się do wyznaczenia wartości lokalnej skali długości

$$\left(m = \frac{\mu}{r} = 1\right) \Leftrightarrow \left(\ln m = \ln\mu - \ln r = 0\right) \tag{17}$$

Ponieważ $\ln\mu$ jest funkcją harmoniczną zmiennych q i l, zatem możemy poszukiwać tej funkcji w postaci szeregu

$$\ln\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k \psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \theta_k \tag{18}$$

Jest on sumą kombinacji liniowych wielomianów harmonicznych

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \xi\Psi_{k-1} - \eta\theta_{k-1}, \\ \theta_k &= \xi\theta_{k-1} + \eta\Psi_{k-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

wytworzonych z wielomianów harmonicznych zerowego rzędu

$$\Psi_0 = 1, \quad \theta_0 = 0 \tag{20}$$

Dla każdego i-tego punktu (g_i, l_i), $i = 1,2,3,...$, leżącego na linii zerowych zniekształceń, układamy równanie typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k (\Psi_k)_i + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k (\theta_k)_i - \ln r_i = 0 \tag{21}$$

$i = 1, 2, 3, ...$

wynikające z (17) i (18). Liczba tych równań będzie równa liczbie punktów leżących na danej linii.

Z rozwiązania układu równań postaci (21), znajdujemy wartości liczbowe współczynników, $\hat{a}_k$,$\hat{b}_k$, $k = 1, 2, 3, ...$. Możemy więc w dowolnym punkcie *(q,l)* danego obszaru obliczyć lokalną skalę długości $m = \frac{\mu}{r}$ wyrażającą się poprzez funkcję wykładniczą w postaci

$$\mu = e^{\ln \mu} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \theta_k} \tag{26}$$

Na podstawie (18) i (14) nietrudno pokazać, że prawdziwe są zależności opisujące zbieżności południków

$$\gamma = -\int (\ln \mu)_L \, dq + C_1(L) = \int \left[\sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k (\theta_k)_q - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k (\Psi_k)_q \right] dq + C_1(L)$$

$$\gamma = \int (\ln \mu)_q \, dL + C_2(q) = \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k (\theta_k)_L - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k (\Psi_k)_L \right] dl + C_2(q) \tag{23}$$

Oznacza to, że przy $C_1\ (L) = C_2\ (q) = 0$ zachodzi równość

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \theta_k - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \Psi_k \tag{24}$$

Zatem kąt zbieżności południków γ w odwzorowaniu konforemnym wyraża się przez te same współczynniki liczbowe $\hat{a}_k, \hat{b}_k, k = 1,2,3,...$, które występują w wyrażeniu (18) określającym $\ln \mu$.

Współrzędne *x,y* wektora $\vec{\tau}$ również są funkcjami harmonicznymi, a więc analitycznie dającymi się wyrazić za pomocą wielomianów harmonicznych postaci (19).

Jeżeli przyjmiemy zależności opisujące współrzędne *x,y* w postaci

$$\begin{bmatrix} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \theta_k \\ y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \Psi_k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_q = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\Psi_k)_q - \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\theta_k)_q \\ y_q = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\theta_k)_q + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\Psi_k)_q \end{bmatrix} \tag{25}$$

i uwzględnimy w (25), że

$$\left(\Psi_k\right)_q = \left(\theta_k\right)_L = k\Psi_{k-1}\,, \quad \left(\theta_k\right)_q = -\left(\Psi_k\right)_L = k\theta_{k-1} \tag{26}$$

to na podstawie równań (16), które mają postać

$$x_q = \mu\cos\gamma\,, \quad y_q = \mu\sin\gamma \tag{27}$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$\mu\cos\gamma = T, \quad \mu\sin\gamma = P \tag{28}$$

i uwzględnieniu (25), (26) ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\Psi_{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\,b_k\theta_{k-1} = T \\ &\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\theta_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\,b_k\Psi_{k-1} = P \end{aligned} \tag{29}$$

Reasumując powyższe rozważania, dla każdego punktu o współrzędnych *(q,L)*, o znanych wartościach parametrów μ i γ, układamy równanie liniowe typu (29), w których niewiadomymi są poszukiwane współczynniki a_k, b_k, k = 1, 2, 3, ...

Dla w miarę równomiernie rozłożonej sieci punktów w danym obszarze rozwiązujemy odpowiadający jej układ równań postaci (29) i znajdujemy wartości liczbowe współczynników a_k, b_k występujących w szeregu potęgowym (25) definiującym poszukiwane współrzędne *x,y* w odwzorowaniu.

W przypadku wyznaczania odwzorowania symetrycznego względem południka osiowego l = 0, równania (18), (24) i (25) ze względu na zerowanie się współczynników przyjmują uproszczoną postać

$$\ln\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k\psi_k \tag{30}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k\theta_k \tag{31}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Psi_k\,, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\theta_k \tag{32}$$

Zastosowanie przedstawionej metody do tworzenia wybranych odwzorowań konforemnych

W oparciu o przedstawioną w artykule metodę wyznaczono współczynniki wielomianów aproksymacyjnych dla trzech jednostrefowych odwzorowań kartograficznych konforemnych obszaru Polski. Są to odwzorowania Gaussa-Krűgera, stożkowe sieczne Lamberta i odwzorowanie Roulsillhe'a.

Odwzorowanie Gaussa-Krűgera

W przykładzie wyznaczono współczynniki wielomianów w metodzie opisanej w niniejszym artykule. Następnie w oparciu o te wielomiany obliczono współrzędne prostokątne oraz skalę zniekształceń długości w odwzorowaniu Gaussa-Krűgera. Dla porównania wyznaczono również współrzędne prostokątne i skalę zniekształceń długości za pomocą następujących wzorów (Balcerzak, Gdowski, Panasiuk 2000)

$$x = R\left(\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} i_{2j} \sin(2j\alpha)\cosh(2j\beta)\right), \tag{33}$$

$$y = R\left(\beta + \sum_{j=1}^{\infty} i_{2j} \cos(2j\alpha)\sinh(2j\beta)\right) \tag{34}$$

gdzie

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos l}\right), \ \beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\varphi\sin l}{1-\cos\varphi\sin l}\right), \tag{35}$$

$$\varphi = 2\left(\arctan\left(\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)\right)\left(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}}\right)\right) - \frac{\pi}{2}, \ l = L - L_0, \tag{36}$$

$$R = \frac{a}{1+n}\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \frac{25n^8}{16384} + \ldots\right) \tag{37}$$

n – trzecie spłaszczenie elipsoidy obrotowej spłąszczonej.

Szeregi we wzorach (33) i (34) można ograniczyć do czterech pierwszych wyrazów zachowując odpowiednią dokładność obliczania współrzędnych w obszarze Polski. Stąd wystarczy wyznaczyć cztery pierwsze współczynniki i_{2j} dla j=1,2,3,4

$$i_2 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 + \ldots \qquad i_6 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \ldots \tag{38}$$

$$i_4 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \ldots \qquad i_8 = \frac{49561}{161280}n^4 + \ldots$$

Skalę zniekształceń długości wyraża wzór

$$m_{GK} = \frac{R\cos\varphi}{N\cos B}\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{R}\right)_\alpha^2 + \left(\frac{y}{R}\right)_\alpha^2}{1-\cos^2\varphi\sin^2 l}} \tag{39}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial\alpha} &= \left(\frac{x}{R}\right)_\alpha = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2ji_{2j}\cos(2j\alpha)\cosh(2j\beta) \\ \frac{\partial\left(\frac{y}{R}\right)}{\partial\alpha} &= \left(\frac{y}{R}\right)_\alpha = -\sum_{j=1}^{\infty} 2ji_{2j}\sin(2j\alpha)\sinh(2j\beta) \end{aligned} \tag{40}$$

Wyniki przedstawiono w tabeli 1. W kolumnach 1 i 2 znajdują się współrzędne geodezyjne B i L punktów węzłowych siatki kartograficznej, w kolumnach 3, 4 i 5 współrzędne prostokątne X i Y oraz skala zniekształceń długości m w odwzorowaniu Gaussa-Krűgera obliczone wg wzorów (33)-(40). W kolumnach 6, 7 i 8 współrzędne prostokątne X' i Y' oraz skala zniekształceń długości m' w odwzorowaniu Gaussa-Krűgera obliczone wg metody przedstawionej w artykule. W kolumnach 9, 10 i 11 różnice pomiędzy obliczonymi wartościami współrzędnych prostokątnych i skali zniekształceń długości wg obu metod.

Uzyskane wyniki świadczą o wysokiej dokładności obliczeń uzyskanych za pomocą przedstawionej w artykule metody. Można ją z powodzeniem stosować jako alternatywną metodę tworzenia odwzorowania Gaussa-Krügera obszaru Polski w szerokiej strefie odwzorowaczej.

Odwzorowanie stożkowe Lamberta

W oparciu o przedstawioną w artykule metodę wyznaczono współczynniki wielomianów aproksymujących odwzorowanie stożkowe Lamberta z dwoma równoleżnikami sieczności o szerokościach B_1=51° oraz B_2=53°. Następnie za pomocą wielomianów wyznaczono współrzędne prostokątne oraz skalę zniekształceń długości w tym odwzorowaniu. Dla porównania wyznaczono również współrzędne za pomocą następujących wzorów (Różycki, 1973)

$$x = \rho\cos(cL) \tag{41}$$

$$y = \rho\sin(cL) \tag{42}$$

$$\rho = \frac{\rho_r}{U^c} \tag{43}$$

$$U = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)}{\tan^e\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)} \tag{44}$$

Tabela 1

B	*L*	*X*	*Y*	*m*	*X'*	*Y'*	*m'*	*X-X'*	*Y-Y'*	*m-m'*
[°]	[°]	[m]	[m]		[m]	[m]		[m]	[m]	
48	14	5330539,5715	-373077,3304	1,00170999	5330539,5715	-373077,3304	1,00170999	0,0000	0,0000	0,00000000
50	14	5552840,5115	-358399,7277	1,00157732	5552840,5115	-358399,7277	1,00157732	0,0000	0,0000	0,00000000
52	14	5775160,0918	-343284,5369	1,00144639	5775160,0918	-343284,5369	1,00144639	0,0000	0,0000	0,00000000
54	14	5997498,0847	-327750,1171	1,00131782	5997498,0847	-327750,1170	1,00131782	0,0000	-0,0001	0,00000000
48	16	5322784,9030	-223865,4616	1,00061560	5322784,9031	-223865,4616	1,00061560	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	16	5545162,0834	-215070,2648	1,00056791	5545162,0834	-215070,2648	1,00056791	0,0000	0,0000	0,00000000
52	16	5767595,2929	-206011,3235	1,00052083	5767595,2929	-206011,3235	1,00052083	0,0000	0,0000	0,00000000
54	16	5990083,7438	-196699,5782	1,00047460	5990083,7438	-196699,5782	1,00047460	0,0000	0,0000	0,00000000
48	18	5318911,5738	-74624,9625	1,00006840	5318911,5738	-74624,9625	1,00006840	0,0000	0,0000	0,00000000
50	18	5541326,3457	-71695,1256	1,00006311	5541326,3457	-71695,1256	1,00006311	0,0000	0,0000	0,00000000
52	18	5763815,8428	-68677,1758	1,00005788	5763815,8428	-68677,1758	1,00005788	0,0000	0,0000	0,00000000
54	18	5986379,0063	-65574,7475	1,00005274	5986379,0063	-65574,7475	1,00005274	0,0000	0,0000	0,00000000
48	19	5318427,5954	0,0000	1,00000000	5318427,5954	0,0000	1,00000000	0,0000	0,0000	0,00000000
50	19	5540847,0416	0,0000	1,00000000	5540847,0416	0,0000	1,00000000	0,0000	0,0000	0,00000000
52	19	5763343,5499	0,0000	1,00000000	5763343,5499	0,0000	1,00000000	0,0000	0,0000	0,00000000
54	19	5985916,0283	0,0000	1,00000000	5985916,0283	0,0000	1,00000000	0,0000	0,0000	0,00000000
48	20	5318911,5738	74624,9625	1,00006840	5318911,5738	74624,9625	1,00006840	0,0000	0,0000	0,00000000
50	20	5541326,3457	71695,1256	1,00006311	5541326,3457	71695,1256	1,00006311	0,0000	0,0000	0,00000000
52	20	5763815,8428	68677,1758	1,00005788	5763815,8428	68677,1758	1,00005788	0,0000	0,0000	0,00000000
54	20	5986379,0063	65574,7475	1,00005274	5986379,0063	65574,7475	1,00005274	0,0000	0,0000	0,00000000
48	22	5322784,9030	223865,4616	1,00061560	5322784,9031	223865,4616	1,00061560	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	22	5545162,0834	215070,2648	1,00056791	5545162,0834	215070,2648	1,00056791	0,0000	0,0000	0,00000000
52	22	5767595,2929	206011,3235	1,00052083	5767595,2929	206011,3235	1,00052083	0,0000	0,0000	0,00000000
54	22	5990083,7438	196699,5782	1,00047460	5990083,7438	196699,5782	1,00047460	0,0000	0,0000	0,00000000
48	24	5330539,5715	373077,3304	1,00170999	5330539,5715	373077,3304	1,00170999	0,0000	0,0000	0,00000000
50	24	5552840,5115	358399,7277	1,00157732	5552840,5115	358399,7277	1,00157732	0,0000	0,0000	0,00000000
52	24	5775160,0918	343284,5369	1,00144639	5775160,0918	343284,5369	1,00144639	0,0000	0,0000	0,00000000
54	24	5997498,0847	327750,1171	1,00131782	5997498,0847	327750,1170	1,00131782	0,0000	0,0001	0,00000000

$$\sin\psi = e\sin B \tag{45}$$

$$\rho_r = \frac{r_1 U_1^{\,c}}{c} \tag{46}$$

$$c = \frac{\log r_1 - \log r_2}{\log U_2 - \log U_1} \tag{47}$$

$$r_1 = N_1 \cos(B_1) \tag{48}$$

$$r_2 = N_2 \cos(B_2) \tag{49}$$

oraz skalę zniekształceń długości z wzoru

$$m = \frac{c\rho}{N\cos B} \tag{50}$$

Wyniki przedstawiono w tabeli 2. W kolumnach 1 i 2 znajdują się współrzędne geodezyjne B i L punktów węzłowych siatki kartograficznej, w kolumnach 3, 4 i 5 współrzędne prostokątne X i Y oraz skala zniekształceń długości m w odwzorowaniu Lamberta obliczone wg wzorów (41)-(50). W kolumnach 6, 7 i 8 współrzędne prostokątne X' i Y' oraz skala zniekształceń długości m' w odwzorowaniu Lamberta obliczone wg metody przedstawionej w artykule. W kolumnach 9, 10 i 11 różnice pomiędzy obliczonymi wartościami współrzędnych prostokątnych i skali zniekształceń długości wg obu metod.

Również w przypadku tego odwzorowania uzyskane wyniki świadczą o wysokiej dokładności obliczeń uzyskanych za pomocą przedstawionej w artykule metody.

Tabela 2.

B	***L***	***X***	***Y***	***m***	***X'***	***Y'***	***m'***	***X-X'***	***Y-Y'***	***m-m'***
[°]	[°]	[m]	[m]		[m]	[m]		[m]	[m]	
52	14	4980720,6633	-343067,3467	0,99984808	4980720,6633	-343067,3467	0,99984808	0,0000	0,0000	0,00000000
54	14	4758662,7730	-327772,2084	1,00046310	4758662,7730	-327772,2084	1,00046310	0,0000	0,0000	0,00000000
48	16	5433095,7661	-224309,1430	1,00221884	5433095,7662	-224309,1430	1,00221884	-0,0001	0,0000	0,00000000
49	16	5321803,6166	-219714,3691	1,00119057	5321803,6167	-219714,3691	1,00119057	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	16	5210590,4358	-215122,8554	1,00044935	5210590,4359	-215122,8554	1,00044935	-0,0001	0,0000	0,00000000
52	16	4988272,2938	-205944,2961	0,99984808	4988272,2938	-205944,2961	0,99984808	0,0000	0,0000	0,00000000
54	16	4765877,7254	-196762,5814	1,00046310	4765877,7255	-196762,5814	1,00046310	-0,0001	0,0000	0,00000000
48	18	5437209,8418	-74788,5773	1,00221884	5437209,8419	-74788,5773	1,00221884	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	18	5214536,0250	-71725,7089	1,00044935	5214536,0250	-71725,7089	1,00044935	0,0000	0,0000	0,00000000
52	18	4992049,5380	-68665,4173	0,99984808	4992049,5381	-68665,4173	0,99984808	-0,0001	0,0000	0,00000000
54	18	4769486,5670	-65604,0736	1,00046310	4769486,5670	-65604,0736	1,00046310	0,0000	0,0000	0,00000000
48	19	5437724,1743	0,0000	1,00221884	5437724,1743	0,0000	1,00221884	0,0000	0,0000	0,00000000
50	19	5215029,2936	0,0000	1,00044935	5215029,2936	0,0000	1,00044935	0,0000	0,0000	0,00000000
52	19	4992521,7606	0,0000	0,99984808	4992521,7606	0,0000	0,99984808	0,0000	0,0000	0,00000000
54	19	4769937,7362	0,0000	1,00046310	4769937,7362	0,0000	1,00046310	0,0000	0,0000	0,00000000
48	20	5437209,8418	74788,5773	1,00221884	5437209,8419	74788,5773	1,00221884	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	20	5214536,0250	71725,7089	1,00044935	5214536,0250	71725,7089	1,00044935	0,0000	0,0000	0,00000000
52	20	4992049,5380	68665,4173	0,99984808	4992049,5381	68665,4173	0,99984808	-0,0001	0,0000	0,00000000
54	20	4769486,5670	65604,0736	1,00046310	4769486,5670	65604,0736	1,00046310	0,0000	0,0000	0,00000000
48	22	5433095,7661	224309,1430	1,00221884	5433095,7662	224309,1430	1,00221884	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	22	5210590,4358	215122,8554	1,00044935	5210590,4359	215122,8554	1,00044935	-0,0001	0,0000	0,00000000
52	22	4988272,2938	205944,2961	0,99984808	4988272,2938	205944,2961	0,99984808	0,0000	0,0000	0,00000000
54	22	4765877,7254	196762,5814	1,00046310	4765877,7255	196762,5814	1,00046310	-0,0001	0,0000	0,00000000
48	24	5424870,7276	373659,9847	1,00221884	5424870,7277	373659,9847	1,00221884	-0,0001	0,0000	0,00000000
50	24	5202702,2430	358357,2288	1,00044935	5202702,2431	358357,2288	1,00044935	-0,0001	0,0000	0,00000000
52	24	4980720,6633	343067,3467	0,99984808	4980720,6633	343067,3467	0,99984808	0,0000	0,0000	0,00000000
54	24	4758662,7730	327772,2084	1,00046310	4758662,7730	327772,2084	1,00046310	0,0000	0,0000	0,00000000

Odwzorowanie Roussilhe'a

W oparciu o opisaną w artykule metodę wyznaczono współczynniki wielomianów aproksymujących odwzorowanie zachowujące stałość skali na kole geodezyjnym. Do wyznaczenia współrzędnych punktów leżących na kole geodezyjnym wykorzystano metody przenoszenia współrzędnych na elipsoidzie. Uzyskano w ten sposób odwzorowanie o zbliżonych własnościach do odwzorowania Roussilhe'a. Stosując wielomiany obliczono współrzędne prostokątne oraz skalę zniekształceń długości w punktach węzłowych siatki kartograficznej założonej dla obszaru Polski. Jednocześnie dla porównania wyznaczono współrzędne w odwzorowaniu Roussilhe'a za pomocą niżej przedstawionych wzorów (Balcerzak, 2000)

$$x_R = \frac{2R\sin\frac{x-x_0}{R}}{\cos\frac{x-x_0}{R} + \cosh\frac{y}{R}} \tag{51}$$

$$y_R = \frac{2R\sinh\frac{y}{R}}{\cos\frac{x-x_0}{R} + \cosh\frac{y}{R}} \tag{52}$$

oraz skalę zniekształceń długości

$$m_R = \frac{m_{GK}}{\cos^2\left(\frac{x-x_0}{2R}\right)\sinh^2\left(\frac{y}{2R}\right)} \tag{53}$$

gdzie $R = \sqrt{M_0 N_0}$, x i y współrzędne prostokątne płaskie w odwzorowaniu Gaussa-Krügera.

Wyniki przedstawiono w tabeli 3. W kolumnach 1 i 2 znajdują się współrzędne geodezyjne B i L punktów węzłowych siatki kartograficznej, w kolumnach 3, 4 i 5 współrzędne prostokątne X i Y oraz skala zniekształceń długości m w odwzorowaniu Roussilhe'a obliczone wg wzorów (51)-(53). W kolumnach 6, 7 i 8 współrzędne prostokątne X' i Y' oraz skala zniekształceń długości m' w odwzorowaniu Roussilhe'a obliczone wg metody przedstawionej w artykule. W kolumnach 9, 10 i 11 różnice pomiędzy obliczonymi wartościami współrzędnych prostokątnych i skali zniekształceń długości wg obu metod.

Uzyskane wyniki pokazują pewne rozbieżności pomiędzy obiema metodami. Różnice pomiędzy współrzędnymi uzyskanymi z obu metod sięgają kilkudziesięciu centymetrów. Mogą one wynikać z faktu różnie zdefiniowanej linii zerowych zniekształceń w obu metodach. W odwzorowaniu opisanym wzorami 51–53 niekoniecznie musi to być koło geodezyjne. Uzyskana dokładność jednak pozwala na stosowanie metody w opracowaniu map topograficznych.

Tabela 3

B	***L***	***X***	***Y***	***m***	***X'***	***Y'***	***m'***	***X-X'***	***Y-Y'***	***m-m'***
[º]	[º]	[m]	[m]		[m]	[m]		[m]	[m]	
48	14	-432599,8990	-373399,7843	1,00200522	-432599,7431	-373399,7895	1,00200447	-0,1559	0,0052	0,00000075
50	14	-210356,2448	-358402,9595	1,00106031	-210356,2412	-358402,9050	1,00105981	-0,0036	-0,0545	0,00000050
52	14	11808,0056	-343202,1190	1,00072351	11807,9642	-343202,1342	1,00072357	0,0414	0,0152	-0,00000006
54	14	234026,4674	-327788,3148	1,00099464	234026,4982	-327788,3765	1,00099514	-0,0308	0,0617	-0,00000050
48	16	-440597,9575	-224109,2128	1,00149979	-440597,9179	-224109,2759	1,00149979	-0,0396	0,0631	0,00000000
50	16	-218140,7782	-215112,7256	1,00057613	-218140,7709	-215112,7167	1,00057596	-0,0073	-0,0089	0,00000017
52	16	4250,6362	-205993,4667	1,00026046	4250,6262	-205993,4737	1,00026049	0,0100	0,0070	-0,00000003
54	16	226710,1980	-196746,0541	1,00055263	226710,2194	-196746,0720	1,00055283	-0,0214	0,0179	-0,00000020
48	18	-444596,3873	-74714,6185	1,00124710	-444596,4199	-74714,6499	1,00124748	0,0326	0,0314	-0,00000038
50	18	-222032,5838	-71716,0581	1,00033406	-222032,5848	-71716,0593	1,00033406	0,0010	0,0012	0,00000000
52	18	472,2792	-68676,5134	1,00002894	472,2784	-68676,5156	1,00002897	0,0008	0,0022	-0,00000003
54	18	223052,2634	-65594,1883	1,00033163	223052,2763	-65594,1912	1,00033169	-0,0129	0,0029	-0,00000006
48	19	-445096,1629	0,0000	1,00121551	-445096,2051	0,0000	1,00121595	0,0422	0,0000	-0,00000044
50	19	-222519,0379	0,0000	1,00030380	-222519,0403	0,0000	1,00030382	0,0024	0,0000	-0,00000002
52	19	0,0000	0,0000	1,00000000	0,0000	0,0000	1,00000003	0,0000	0,0000	-0,00000003
54	19	222595,0310	0,0000	1,00030401	222595,0427	0,0000	1,00030404	-0,0117	0,0000	-0,00000003
48	20	-444596,3873	74714,6185	1,00124710	-444596,4199	74714,6499	1,00124748	0,0326	-0,0314	-0,00000038
50	20	-222032,5838	71716,0581	1,00033406	-222032,5848	71716,0593	1,00033406	0,0010	-0,0012	0,00000000
52	20	472,2792	68676,5134	1,00002894	472,2784	68676,5156	1,00002897	0,0008	-0,0022	-0,00000003
54	20	223052,2634	65594,1883	1,00033163	223052,2763	65594,1912	1,00033169	-0,0129	-0,0029	-0,00000006
48	22	-440597,9575	224109,2128	1,00149979	-440597,9179	224109,2759	1,00149979	-0,0396	-0,0631	0,00000000
50	22	-218140,7782	215112,7256	1,00057613	-218140,7709	215112,7167	1,00057596	-0,0073	0,0089	0,00000017
52	22	4250,6362	205993,4667	1,00026046	4250,6262	205993,4737	1,00026049	0,0100	-0,0070	-0,00000003
54	22	226710,1980	196746,0541	1,00055263	226710,2194	196746,0720	1,00055283	-0,0214	-0,0179	-0,00000020
48	24	-432599,8990	373399,7843	1,00200522	-432599,7431	373399,7895	1,00200447	-0,1559	-0,0052	0,00000075
50	24	-210356,2448	358402,9595	1,00106031	-210356,2412	358402,9050	1,00105981	-0,0036	0,0545	0,00000050
52	24	11808,0056	343202,1190	1,00072351	11807,9642	343202,1342	1,00072357	0,0414	-0,0152	-0,00000006
54	24	234026,4674	327788,3148	1,00099464	234026,4982	327788,3765	1,00099514	-0,0308	-0,0617	-0,00000050

Podsumowanie

W artykule przedstawiono pewną metodę generowanie współczynników wielomianów aproksymacyjnych w odwzorowaniach konforemnych. Metoda może znaleźć zastosowanie do tworzenia odwzorowań konforemnych ograniczonych obszarów powierzchni elipsoidy spełniających określone kryteria szczegółowe określające sposób odwzorowania wybranych linii. Opiera się ona na numerycznym rozwiązaniu równań różniczkowych Eulera-Urmajewa.

Zaprezentowano również przykłady zastosowania tej metody. Przedstawiono także wyniki obliczeń współrzędnych, i lokalnej skali zniekształceń długości uzyskane dla wybranych odwzorowań kartograficznych, za pomocą opisanej metody oraz z zastosowaniem wzorów analitycznych powszechnie stosowanych w kartografii.

Literatura

Balcerzak J., Panasiuk J., 2005: Wprowadzenie do kartografii matematycznej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
Różycki J., 1973: Kartografia matematyczna, Państwowe Wydawnictwa Naukowe.
Balcerzak J., 2000: Uogólnione odwzorowanie Roussilhe'a powierzchni elipsoidy, *Prace Naukowe Geodezja*, z. 37.
Balcerzak J., Gdowski B., Panasiuk J., 2000: Projection of the area of Poland in wide Gauss-Krüger zone, *Geodezja i Kartografia*, t. XLIX, z.2, s. 55-71.

Summary

In the paper, a method of computing polynomial coefficients approximating conformal map projections is presented. This method may be applied to creation of conformal projections of the ellipsoidal areas satisfying the criteria determining in detail the way of projection of selected parametric lines (meridians or parallels of latitude). The method is based on numerical solution of Euler-Urmayev differential equations.
Some examples of this method are given. Also, the paper contains results of calculation of coordinates and local scales of linear distortions in selected projections with the use of the method described in the paper and of analytical formulas generally used in cartography.

dr inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel (0-22) 660 55 90