

**WŁASNOŚCI ODWZOROWANIA
CASSINIEGO-SOLDNERA CAŁEJ ELIPSOIDY**
PROPERTIES OF CASSINI-SOLDNER PROJECTION
OF THE WHOLE ELLIPSOID

Paweł Pędzich

Instytut Fotogrametrii i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, odwzorowanie Cassiniego-Soldnera, całki eliptyczne, funkcje eliptyczne Jacobiego

Keywords: mathematical cartography, map projections, Cassini-Soldner projection, elliptic integrals, Jacoby elliptic functions

Wstęp

Idea odwzorowania Cassiniego-Soldnera została zaproponowana w XIX wieku. Odwzorowanie to w swej rudymenarnej postaci było przez wiele lat stosowane do opracowania map topograficznych, katastralnych i innych. Zastosowania te były jednak ograniczone do wąskich (2–3-stopniowych) pasów południkowych. W artykule proponuje się zastosowanie funkcji eliptycznych Jacobiego do konstrukcji tego odwzorowania. Pozwoli to na dokładne określenie własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy.

**Pojęcie współrzędnych Soldnera
oraz odwzorowania Cassiniego-Soldnera**

Współrzędne Soldnera η i ξ powierzchni elipsoidy

$$\vec{r} = \vec{r}(B, l) = \left[\frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right] \quad (1)$$

$$(B, l) \in \omega = \left\{ (B, l) : B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), L \in (-\pi, \pi) \right\}$$

są zdefiniowane (rys. 1) jako:

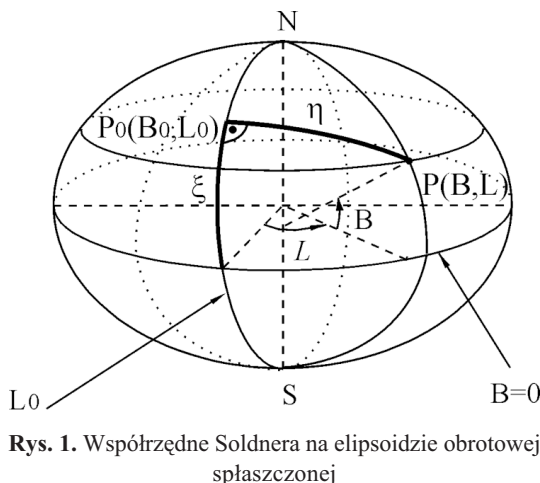
η – długość łuku południka $L=L_0$ łączącego punkty $(B=0, L=L_0)$ i $P_0(B=B_0, L=L_0)$,

ξ – długość łuku linii geodezyjnej łączącej punkty $P_0(B_0, L_0)$ i $P(B, L)$, w jej punkcie zwrotu P_0 , ortogonalnej do południka środkowego $L=L_0$.

Wyznaczenie tak określonych współrzędnych (η, ξ) Soldnera sprowadza się zatem do rozwiązania trzech zadań: wyznaczenia punktu zwrotu linii geodezyjnej $P_0(B_0, L_0)$, długości łuku południka liczonej od równika $B=0$ do punktu zwrotu $P_0(B_0, L_0)$ oraz długości linii geodezyjnej liczonej od punktu zwrotu $P_0(B_0, L_0)$ do punktu $P(B, L)$.

Współrzędne prostokątne płaskie x, y w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera definiuje się wówczas jako funkcję wektorową postaci

$$\vec{r}' = [x = \eta(B, L), y = \xi(B, L)] \quad (2)$$



Rys. 1. Współrzędne Soldnera na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera z zastosowaniem całek i funkcji eliptycznych Jacobiego

Dotychczasowe metody konstruowania odwzorowania Cassiniego-Soldnera mają ograniczony zasięg użytkowania. Odnoszą się albo do powierzchni sfery jako powierzchni oryginału w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera albo do wąskich stref odwzorowawczych powierzchni elipsoidy.

W celu określenia własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy oraz zbadania możliwości zwiększenia zakresu jego stosowalności w niniejszym artykule proponuje się użycie do jego konstrukcji funkcji i całek eliptycznych Jacobiego. Problem konstrukcji odwzorowania Cassiniego-Soldnera sprowadza się wówczas do wyrażenia poprzez te całki i funkcje długości łuku południka osiowego odwzorowania oraz długości linii geodezyjnej, przechodzącej przez dany punkt $P(B, L)$ oraz przez jej punkt zwrotu $P_0(B_0, L_0)$. Niezbędne więc jest wyznaczenie współrzędnych geodezyjnych (B_0, L_0) , położonego na południku osiowym $L=L_0$, punktu zwrotu P_0 analizowanej linii geodezyjnej przechodzącej przez zadany punkt $P(B, L)$.

W dalszej części artykułu przyjmujemy, że współrzędne elipsoidy odniesienia są zdefiniowane w układzie współrzędnych geodezyjnych zredukowanych u, L jako

$$\vec{r} = [x = a \cos u \cos L, y = a \cos u \sin L, z = b \sin u] \quad (3)$$

gdzie

$$\tan u = \sqrt{1 - e^2} \tan B \quad (4)$$

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera można wówczas przedstawić ogólnie jako funkcję wektorową w postaci

$$\vec{r}' = [x = \eta(u, L), y = \xi(u, L)] \quad (5)$$

Problematyka wyznaczenia punktu zwrotu $P(u_0, L_0)$ linii geodezyjnej

Wyznaczenie punktu $P_0(u_0, L_0)$ zwrotu linii geodezyjnej, gdy dany jest punkt $P(u, L)$ leżący na rozważanej linii geodezyjnej oraz znana jest wartość różnicy długości geodezyjnych $\Delta L = L - L_0$ do punktu P_0 zwrotu tej linii, zasada się na określeniu równania linii geodezyjnej uzależnionego od jej punktu zwrotu $P_0(u_0, L_0)$.

Równanie linii geodezyjnej we współrzędnych zredukowanych u, L na powierzchni elipsoidy określonej równaniem (3) można zapisać w postaci (Panasiuk i inni, 1995)

$$L - L_0 = v + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{2k} \left(\frac{1}{2} \right) J_k \quad (6)$$

$$J_k = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \tan^{2r} u_0 J_{r+1} \quad (7)$$

$$J_{r+1} = \frac{1}{2rp^2} \frac{w}{(w^2 + p^2)^r} + \frac{2r-1}{2rp^2} J_r \quad (8)$$

$$\text{gdzie } \cos v = \cot u_0 \tan u, \quad w = \tan v, \quad p = \frac{1}{\cos u_0}.$$

Wyraz J_r w (8) dla $r=1$ przyjmuje początkową postać

$$J_1 = \cos u_0 \arctan(w \cos u_0) \quad (9)$$

Wyznaczenie szerokości geodezyjnej zredukowanej u_0 punktu zwrotu linii geodezyjnej przechodzącej przez punkt $P(u, L)$, można przeprowadzić metodą iteracyjną na podstawie zależności (6), (7), (8) i (9). Za początkowe przybliżenie wartości u_0 można przyjąć

$$u_0(0) = \arccot(\cos(L - L_0) \cot u) \quad (10)$$

Zastosowanie całek eliptycznych Jacobiego do wyznaczenia współrzędnych Soldnera

Współrzędne Soldnera można przedstawić za pomocą zależności (Panasiuk i inni, 1995)

$$\eta = a \left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - u_0, e\right) \right] \quad (11)$$

$$\xi = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0} E[\text{am}(w, k), k] \quad (12)$$

gdzie symbolem E oznaczono całkę eliptyczną drugiego rodzaju Legendre'a w postaci normalnej, w której

$$\text{cn}(w, k) = \frac{\sin u}{\sin u_0}, \quad k = \frac{e' \sin u_0}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 u_0}} \quad (13)$$

$\text{cn}(w, k)$ oznacza cosinus eliptyczny Jacobiego zmiennej w z parametrem k , natomiast $\text{am}(w, k)$ oznacza amplitudę zmiennej w z parametrem k .

Rozwinięcie w szereg całki eliptycznej drugiego rodzaju ma następującą postać (Byrd, 1954)

$$E(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m (-k^2)^m t_{2m}(\varphi) \quad (14)$$

gdzie

$$t_0(\varphi) = \varphi$$

$$t_2(\varphi) = \frac{1}{2} [\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]$$

$$t_4(\varphi) = \frac{1}{8} [3\varphi - \sin \varphi \cos \varphi (3 + 2 \sin^2 \varphi)]$$

⋮

$$t_{2m}(\varphi) = \frac{2m-1}{2m} t_{2(m-1)}(\varphi) - \frac{1}{2m} \sin^{2m-1} \varphi \cos \varphi$$

Badanie własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Określenie własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera można powiązać z badaniem przebiegu linii geodezyjnej na elipsoidzie oraz południków soldnerowskich. Dlatego też, badając własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera należy uprzednio przeprowadzić analizę przebiegu tych krzywych.

Przebieg linii geodezyjnej na elipsoidzie

Przebieg linii geodezyjnej na elipsoidzie obrotowej można prześledzić w oparciu o równanie Clairauta

$$\cos u \sin A = \text{const} \quad (15)$$

Z równania (15) można wydedukować wiele własności linii geodezyjnej. Analizę tych własności możemy znaleźć w wielu publikacjach, m.in. (Szpunar, 1982). W niniejszym artykule przedstawimy jedynie te, z których wynikają pewne ważne własności, istotne dla odwzorowania Cassiniego-Soldnera.

Zależność pomiędzy wartością maximum u i azymutem A_0 linii geodezyjnej w punkcie przecięcia równika jest następująca

$$u_{\max} = 90^\circ - A_0 \quad (16)$$

Linia geodezyjna przebiega pomiędzy dwoma symetrycznymi równoleżnikami $\pm u_{\max}$, których szerokości zredukowane u_{\max} są określone poprzez równanie (16). Przebieg linii geodezyjnej jest symetryczny względem południka $L=L_0$ na którym znajduje się punkt zwrotu. Przecina więc ona równik po przeciwnej stronie pod azymutem $180-A_0$.

Okres linii geodezyjnej, czyli różnica między długościami geodezyjnymi dwóch kolejnych węzłów wznoszących lub zniżających zależy od azymutu A_0 . Gdy $A_0=0$ to połowa okresu wynosi 180° . Wtedy linia geodezyjna biegnie po południku. Gdy $A_0 \neq 0$ to połowa okresu jest mniejsza od 180° i dąży do wartości $180^\circ \sqrt{1-e^2}$ gdy A_0 dąży do 90 (Szpunar, 1982).

Na podstawie powyższych rozważań, w dalszej części pracy, zostaną przedstawione pewne własności odwzorowania decydujące o kształcie siatek kartograficznych w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy.

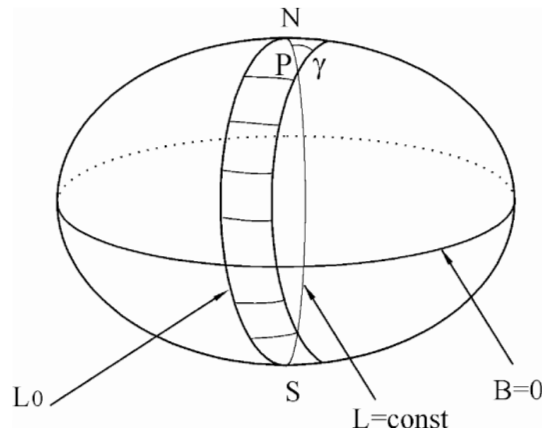
Południki soldnerowskie oraz soldnerowska zbieżność południków na elipsoidzie i w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera

Jeżeli poprowadzimy zbiór odcinków linii geodezyjnych ortogonalnie do południka centralnego $L=L_0$ o jednakowych długościach s , to końce tych odcinków utworzą południk soldnerowski (rys. 2). Południk soldnerowski przecina te tak wyprowadzone z południka L_0 linie geodezyjne pod kątem prostym. Południk geodezyjny dowolnego punktu P oraz jego południk soldnerowski tworzą kąt γ zwany zbieżnością południkową soldnerowską.

Południk soldnerowski na elipsoidzie nie jest krzywą płaską. Punkty go tworzące leżą w mniejszej odległości od płaszczyzny południka osiowego w okolicach równika niż punkty w pobliżu bieguna.

Linie geodezyjne prostopadłe do południka centralnego elipsoidy przecinają równik na pewnym odcinku pomiędzy punktami o długościach geodezyjnych od $L = 90^\circ\sqrt{1-e^2}$ do $L = 90^\circ$. Nie przecinają się w jednym punkcie, tak jak ma to miejsce w przypadku kuli (Szpunar, 1982).

Południki soldnerowskie, w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera odwzorowują się na odcinki linii prostych równoległych do obrazu południka osiowego $L=L_0$. Wynika to z założenia, że linie geodezyjne prostopadłe do południka osiowego odwzorowują się na proste prostopadłe do obrazu południka osiowego i w sposób oczywisty są prostopadłe do południków Soldnerowskich. Obraz kąta soldnerowskiej zbieżności południków jest jednocześnie kątem wyznaczającym kierunek ekstremalnych zniekształceń długości (kątem orientacji elipsy zniekształceń odwzorowawczych) w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera. Z przeprowadzonych analiz wynikają pewne własności odwzorowania decydujące o kształcie siatki kartograficznej i własnościach odwzorowania dotyczących zniekształceń odwzorowawczych.



Rys. 2. Południk soldnerowski oraz soldnerowska zbieżność południków

Siatka kartograficzna w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Południk osiowy w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera odwzorowuje się na odcinek osi x układu współrzędnych prostokątnych płaskich. Obraz równika składa się z czterech różnie odwzorowywanych odcinków.

Pierwszy z nich ograniczony południkami

$$\text{od } L_1 = \left(L_0 + 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right) \text{ do } L_2 = \left(L_0 - 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right)$$

odwzorowuje się na odcinek osi y układu współrzędnych prostokątnych płaskich i jest prostopadły do obrazu południka osiowego.

Drugi ograniczony południkami

$$\text{od } L_3 = \left(L_0 - 180^\circ + 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right) \text{ do } L_4 = \left(L_0 + 180^\circ - 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right)$$

odwzorowuje się na odcinek prostej równoległej do osi y . Oddalony jest od osi y o wartość połowy długości południka.

Pozostałe dwa odcinki równika odwzorowują się symetrycznie względem obrazu południka osiowego jako pewne krzywe, stanowiące jednocześnie ograniczenie siatki kartograficznej.

Każdy z południków o długościach geodezyjnych

$$L \in \left(L_0 + 90^\circ \sqrt{1-e^2}, L_0 - 180^\circ - 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right) \text{ i } L \in \left(L_0 - 90^\circ \sqrt{1-e^2}, L_0 - 180^\circ + 90^\circ \sqrt{1-e^2} \right)$$

rozdziela się na dwie części i odwzorowuje się na dwie oddzielne krzywe symetryczne względem osi y . Pozostałe południki odwzorowują się w sposób ciągły. Na rysunku 3 przedstawiono obraz wycinka elipsoidy ograniczonego południkami $L=0^\circ$ oraz $L=90^\circ$. Przedstawiono tam osobliwości w przebiegu obrazu południków elipsoidy w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera. Dla długości geodezyjnej południka osiowego $L_0=0^\circ$ mamy następujące wartości dla charakterystycznych punktów $L_1=89^\circ 41' 53.69''$, $L_2=-89^\circ 41' 53.69''$, $L_3=90^\circ 18' 06.31''$, $L_4=90^\circ 18' 06.31''$. Fragment obrazu równika zawartego pomiędzy południkiem $L_1=89^\circ 41' 53.69''$ a południkiem $L=90^\circ$ zaznaczono linią przerywaną. Otoczenie tej części równika stanowi osobliwość odwzorowania i może powodować trudności techniczne podczas konstrukcji siatek kartograficznych w tych podobszarach.

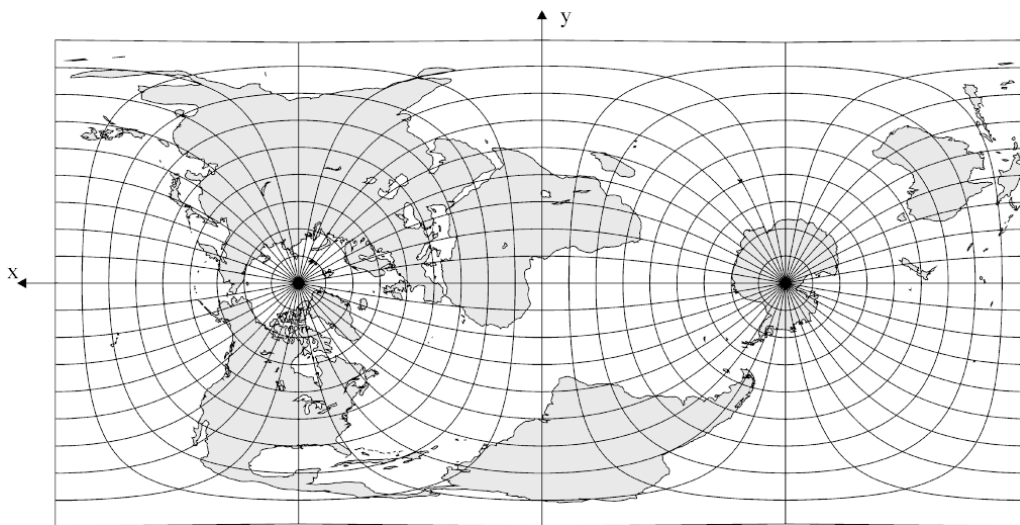
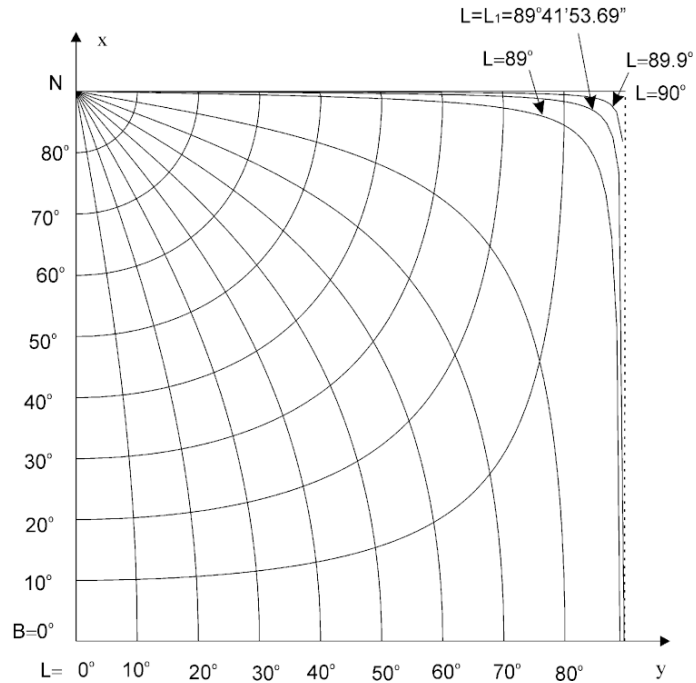
Dla całościowego zobrazowania odwzorowania Cassiniego-Soldnera, na rysunku 4 przedstawiono siatkę kartograficzną wraz z zarysem kontynentów opracowaną dla całej elipsoidy ziemskiej. Południk osiowy $L_0=0^\circ$, skok siatki wynosi $\Delta\varphi=10^\circ$, $\Delta\lambda=10^\circ$.

Ze względu na układ tekstu na stronie, dla zaoszczędzenia miejsca, rysunki 4, 5, 6 i 7 zostały obrócone o 90° .

Zniekształcenia odwzorowawcze w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Południk osiowy odwzorowuje się izometrycznie – bez zniekształceń. Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera jest odwzorowaniem równoodległościowym w kierunku linii geodezyjnych prostopadle wychodzących z południka osiowego. Elementarna skala zniekształceń długości w kierunku tych linii jest równa jedności. Ogólnie rzecz biorąc lokalne zniekształcenia w miarę oddalania się od obrazu południka osiowego mają tendencję wzrastania.

Rys. 3. Osobliwości występujące w przebiegu obrazów południków i równoleżników w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera



Rys. 4. Siatka kartograficzna w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Linie geodezyjne prostopadłe wychodzące z południka osiowego przecinają się na elipsoidzie z południkami Soldnera pod kątem prostym. Ich obrazy w odwzorowaniu także są wzajemnie prostopadłe. Na podstawie I. i II. twierdzenia Tissota wiemy, że krzywe te są krzywymi głównymi odwzorowania i wyznaczają kierunki ekstremalnych zniekształceń długości. Z tego wywodu wynika, że kierunek południka Soldnera będzie kierunkiem maksymalnych zniekształceń liniowych.

Wyznaczenie lokalnych zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Elementarna skala zniekształceń długości w odwzorowaniu elipsoidy w płaszczyznę ma postać

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_B \cos A + \vec{\mu}_L \sin A \quad (17)$$

gdzie

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{r}'_B}{M}, \quad \vec{\mu}_L = \frac{\vec{r}'_L}{N \cos B},$$

$$\vec{r}'_B = [x_B, y_B] \quad \vec{r}'_L = [x_B, y_B] \quad (18)$$

Kąt A_e , $A_e \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ekstremalnych zniekształceń można wyznaczyć ze wzoru

$$\tan 2A_e = \frac{2Q}{P-R} \quad (19)$$

gdzie

$$P = \frac{E'}{M^2}, \quad Q = \frac{F'}{MN \cos B}, \quad R = \frac{G'}{N^2 \cos^2 B}, \quad E' = |\vec{r}'_B|^2, \quad F' = \vec{r}'_B \cdot \vec{r}'_L, \quad G' = |\vec{r}'_L|^2.$$

Skale ekstremalnych zniekształceń długości mają postać:

$$\vec{m} = \vec{\mu}_B \cos A_e + \vec{\mu}_L \sin A_e \quad (20)$$

$$\vec{n} = -\vec{\mu}_B \sin A_e + \vec{\mu}_L \cos A_e$$

Moduł $|\vec{m}|$ wyznacza maksymalne zniekształcenia długości w kierunku A_e tj. południka Soldnera, a $|\vec{n}| = 1$ minimalne w kierunku stosownych linii geodezyjnych.

Skala zniekształceń pól wyraża się jako

$$p = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{MN \cos B} = mn \quad (21)$$

a ponieważ w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera wartość skali minimalnych zniekształceń długości $n=1$ to

$$p = m. \quad (22)$$

Ekstremalne zniekształcenie kierunku

$$\tan \omega_{\beta_m} = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}} \quad (23)$$

lecz ze względu na $n=1$ mamy

$$\tan \omega_{\beta_m} = \frac{m-1}{2\sqrt{m}} \quad (24)$$

Podstawą wyznaczania zniekształceń odwzorowawczych jest określenie pochodnych cząstkowych funkcji (1), tj.

$$\vec{r}'_B = [x_B, y_B], \quad \vec{r}'_L = [x_L, y_L]. \quad (25)$$

Pochodne cząstkowe w (25) możemy na ogół wyznaczać w sposób ścisły (Pędzich, 2005), lecz w przypadku skomplikowanych funkcji odwzorowawczych można je wyznaczyć także numerycznie, np. za pomocą centralnych wzorów różnicowych

$$x_B = \frac{x(B - \Delta B, L) - x(B + \Delta B, L)}{2\Delta B}, \quad y_B = \frac{y(B - \Delta B, L) - y(B + \Delta B, L)}{2\Delta B} \quad (26)$$

$$x_L = \frac{x(B, L - \Delta L) - x(B, L + \Delta L)}{2\Delta L}, \quad y_L = \frac{y(B, L - \Delta L) - y(B, L + \Delta L)}{2\Delta L}$$

lub też stosując metody aproksymacyjne. Należy wówczas wyznaczyć współczynniki odpowiedniego wielomianu aproksymującego wartości współrzędnych x , y , np. wielomianów potęgowych w postaci zleżności

$$x = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} B^i L^j, \quad (27)$$

$$y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} b_{ij} B^i L^j,$$

a następnie obliczyć pochodne x_B, y_B, x_L, y_L tych wielomianów względem B i L .

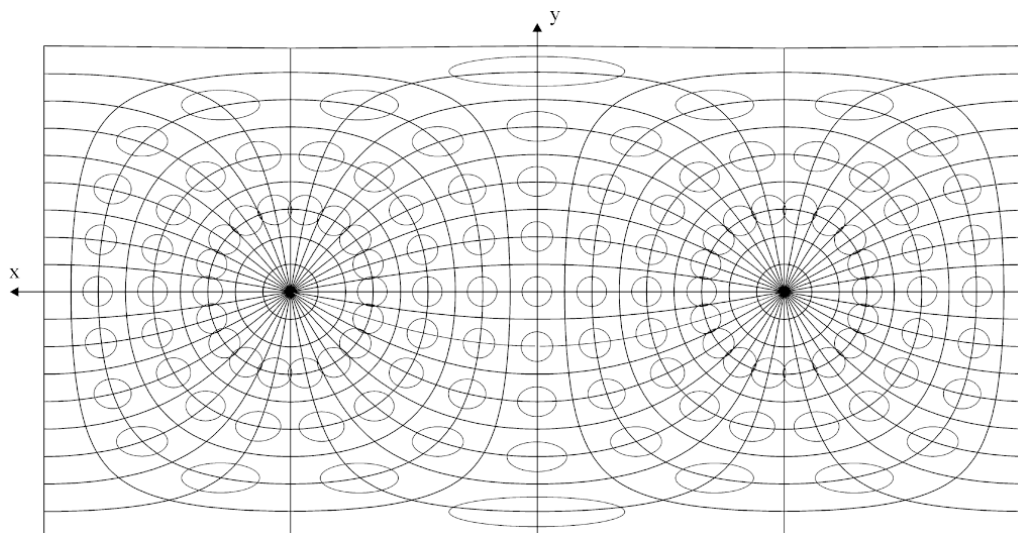
Lokalne zniekształcenia odwzorowawcze w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Na podstawie wyprowadzonych wzorów charakteryzujących zniekształcenia odwzorowawcze możemy przeprowadzić analizę zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy. Rysunek 5 ilustruje siatkę kartograficzną (południki i równoleżniki poprowadzono co 10°) oraz elipsy zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Soldnera całej elipsoidy. Rysunek 6 przedstawia izoskale maksymalnych zniekształceń długości. W tabeli przedstawiono wyniki obliczeń współrzędnych oraz zniekształceń odwzorowawczych w wybranych punktach węzłowych siatki kartograficznej obejmującej $1/8$ powierzchni elipsoidy. Z analizy otrzymanych wyników widać, że w każdym punkcie płaszczyzny odwzorowania, w kierunku osi y skala zniekształceń długości $n=1$ (długości małych półosi elips zniekształceń są równe 1 i są zorientowane w kierunku osi y), natomiast w kierunku osi x skala zniekształceń długości osiąga maksimum (duże półosie elips zniekształceń odwzorowawczych są równoległe do osi x). Ponadto możemy zauważyć, że południk osiowy odwzorowuje się bez zniekształceń (izoskala maksymalnych zniekształceń długości $m=1$, elipsy zniekształceń odwzorowawczych na południku osiowym mają postać jednostkowych okręgów). Maksymalne liniowe zniekształcenia odwzorowawcze rosną wraz z oddalaniem się od południka osiowego.

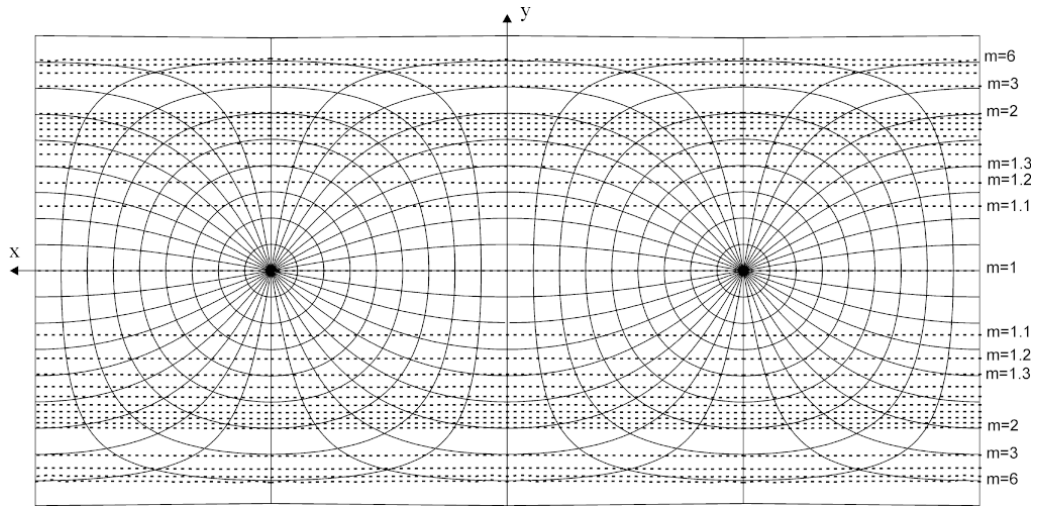
W strefie odwzorowawczej ograniczonej południkami od -60° do 60° , na granicy strefy, skala maksymalnych zniekształceń długości $m=2$. Poszerzenie strefy o 10° powoduje znacz-

Tabela. Zniekształcenia odwzorawcze w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

B[°]	L[°]	X[m]	Y[m]	m	n	p	2wbn[°]
20	20	2342782.118	2087504.529	1.05636588	1.00000000	1.05636588	3.14139775
40	20	4625644.884	1692961.503	1.03633154	1.00000000	1.03633154	2.0446124
60	20	6822852.265	1098739.146	1.01497254	1.00000000	1.01497254	0.85149671
80	20	8950273.324	380216.719	1.00176863	1.00000000	1.00176863	0.10124551
20	40	2815680.114	4137551.285	1.25634911	1.00000000	1.25634911	13.0471872
40	40	5277175.546	3287882.864	1.14934845	1.00000000	1.14934845	7.96886773
60	40	7338702.951	2091924.474	1.05606822	1.00000000	1.05606822	3.12525686
80	40	9141831.413	715644.427	1.00628862	1.00000000	1.00628862	0.35918259
20	60	4004493.913	6064440.603	1.72440418	1.00000000	1.72440418	30.8402258
40	60	6571459.277	4631995.052	1.33652826	1.00000000	1.33652826	16.5621309
60	60	8204273.109	2863134.468	1.10936696	1.00000000	1.10936696	5.94403561
80	60	9438229.022	965839.821	1.01150255	1.00000000	1.01150255	0.65528245
20	80	7178108.394	7537786.037	2.62891434	1.00000000	2.62891434	53.3425406
40	80	8699439.060	5457523.490	1.52162829	1.00000000	1.52162829	23.8770047
60	80	9362118.600	3291551.383	1.14876575	1.00000000	1.14876575	7.93988236
80	80	9805013.634	1099550.112	1.01494907	1.00000000	1.01494907	0.85017184

**Rys. 5.** Elipsy zniekształceń odwzorawczych w odwzorowaniu Cassiniego Soldnera całej elipsoidy

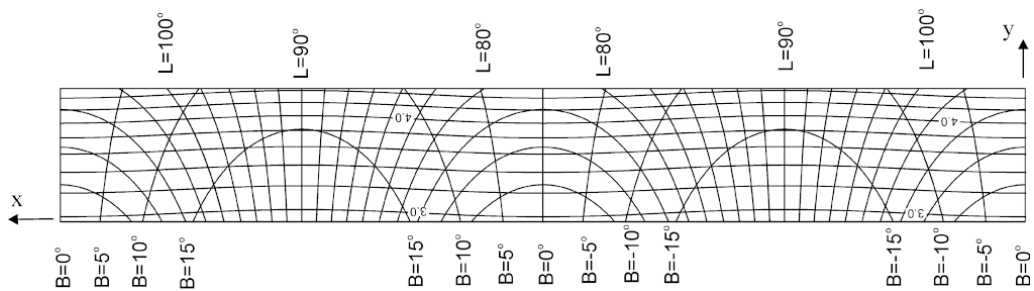
ny wzrost maksymalnych zniekształceń długości, skala maksymalnych zniekształceń wzrasta wówczas do wartości $m=3$. Poszerzenie strefy o kolejne 10° powoduje wzrost skali do $m=6$. Dalsze poszerzenie strefy powoduje bardzo znaczny wzrost liniowych zniekształceń odwzorawczych.



Rys. 6. Izoskole maksymalnych zniekształceń w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy

Badanie kształtu izolinii zniekształceń

Linie stałych zniekształceń pól, kątów i długości w rozpatrywanym odwzorowaniu są zbliżone do linii równoległych do obrazu południka środkowego. Rysunek 7 przedstawia kształt izolinii zniekształceń wycinka płaszczyzny obrazu w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera. Ponieważ zakrzywienie linii jednakowych zniekształceń jest małe, więc dla lepszego zobrazowania ich krzywizn wartości współrzędnych y pomnożono przez pewien stały współczynnik większy od jedności.



Rys. 7. Kształt izolinii maksymalnych zniekształceń długości w odwzorowaniu Cassiniego-Soldnera

Podsumowanie

Odwzorowanie Cassiniego-Soldnera przez wiele lat, w wielu krajach, było podstawowym odwzorowaniem dla map topograficznych i katastralnych. Mimo, że wiele państw zastąpiło je obecnie odwzorowaniem UTM to nadal jest ono jeszcze stosowane. Do opracowania map w tym odwzorowaniu wykorzystywane są przede wszystkim wzory w postaci rozwinięć na szeregi potęgowe o kilku początkowym wyrazach, pozwalające na stosowanie jego w 2–3-stopniowych pasach południkowych. W artykule zaproponowano zastosowanie całek i funkcji eliptycznych Jacobiego do konstrukcji analitycznej postaci odwzorowania całej elipsoidy. Pozwoliło to na globalne zbadanie własności odwzorowania Cassiniego-Soldnera. Przedstawiono metodę wyznaczania współrzędnych prostokątnych płaskich opartą o wyznaczanie wartości całek i funkcji eliptycznych Jacobiego. Możliwość stosunkowo łatwej implementacji proponowanych algorytmów obliczeniowych pozwala na opracowanie odwzorowań Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy. Zbadano także własności metryczne odwzorowania Cassiniego-Soldnera całej elipsoidy. W szczególności pokazano pewne osobliwości występujące na brzegu siatki kartograficznej. Przedstawiono siatkę kartograficzną całego globu ziemskiego. Opisano podstawowe własności dotyczące zniekształceń odwzorowawczych. Pokazano rozkład zniekształceń w odwzorowaniu całej elipsoidy poprzez zaprezentowanie elips zniekształceń odwzorowawczych oraz metody izolinii. Przeprowadzono dyskusję kształtu izolinii zniekształceń w odwzorowaniu.

Literatura

- Byrd P., Friedman M., 1954: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer-Verlag, Berlin.
- Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Pędzich P., 2005: The Soldner projection of the whole ellipsoid, XXII International Cartographic Conference, La Coruna.
- Szpunar W., 1982: Podstawy geodezji wyższej, PPWK, Warszawa.

Summary

Up till present times Cassini-Soldner projection has been used in geodesy and cartography in narrow (2-3°) zones. In this paper, a new approach to construction of Cassiniego-Soldner projection is presented based on elliptic integrals and Jacoby elliptic functions which allows to project the whole ellipsoid.

In the paper, development of formulas for coordinates and for distortion are presented. Properties of Cassini-Soldner projection of the whole ellipsoid are also shown. Especially, some peculiarities which occurs in graticule construction are presented, as well as the graticule in Cassini-Soldner projection of the whole ellipsoid. Moreover, maps presenting distortion by ellipses of distortion and isolines are also shown in the paper.

dr inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel. 022 660 55 90