POLSKIE TOWARZYSTWO INFORMACJI PRZESTRZENNEJ
ROCZNIKI GEOMATYKI 2006 ❍ TOM IV ❍ ZESZYT 3

ZASTOSOWANIE WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH DO APROKSYMACJI ODWZOROWAŃ KARTOGRAFICZNYCH

UTILIZATION OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS TO MAP PROJECTION APPROXIMATION

Jerzy Balcerzak, Paweł Pędzich

Instytut Fotogrametrii i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, wielomiany ortogonalne
Keywords: mathematical cartography, map projection, orthogonal polynomials

Wstęp

Badanie odwzorowań kartograficznych oraz ich własności często wymaga stosowania skomplikowanych formuł i zależności. Dlatego też w pewnych sytuacjach może być wskazane stosowanie metod aproksymacyjnych, pozwalających na uproszczenie obliczeń w praktycznych zastosowaniach lokalnych. Do wyznaczania wartości współczynników wielomianów aproksymacyjnych tradycyjnie stosowana jest metoda najmniejszych kwadratów. Prowadzą one często do rozwiązywania tą metodą słabo uwarunkowanych układów równań liniowych.

W artykule rozważa się zastosowanie wielomianów ortogonalnych do aproksymacji funkcji odwzorowawczych. Przedstawiona metoda pozwala uniknąć rozwiązywania słabo wyznaczalnych układów równań normalnych, a zastosowane do wyznaczania kolejnych wielomianów ortogonalnych związki rekurencyjne ułatwiają algorytmizację i opracowanie stosownych programów komputerowych.

Aproksymacja funkcji *f(x)* wielomianami ortogonalnymi

Przyjmijmy, że dana jest funkcja $f(x)$ oraz zbiór punktów $\{x_i\}$(i=1,2,...,n), w których wyznaczono wartości funkcji $\overline{f_i}$. Jeżeli $p_j(x)$ jest wielomianem potęgowym j-tego stopnia postaci

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{j} a_{kj} x_i^k \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

to funkcję $f(x)$ można przybliżać wielomianem stopnia m wyrażonym zależnością

$$f(x) \approx y_m = \sum_{j=0}^{m} b_j^{(m)} p_j(x) \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Na podstawie wzoru (2) dla określonego zbioru możemy wygenerować układ równań.

$$\sum_{j=0}^{m} b_j p_{ji} = \overline{f}_i$$

Sposób wyznaczenia stałych, w powyższej kombinacji liniowej (2), wielomianów $p_j(x)$ określa nam typ przybliżenia funkcji $f(x)$. Poszukiwanie minimum sumy kwadratów różnicy pomiędzy wartością $\overline{f}$ funkcji $f(x)$ i jej przybliżeniem y_m prowadzi do aproksymacji średnio-kwadratowej funkcji $f(x)$. Dla jej wyznaczenia poszukujemy minimum funkcji celu o postaci

$$H\left(b_0^{(m)}, b_1^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)}\right) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} (\overline{f}_i - y_m(x_i))^2 \qquad n > m \tag{3}$$

Zależność (3) różniczkujemy względem zmiennych b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ i otrzymaną pochodną przyrównujemy do zera

$$\frac{\partial H}{\partial b_k^{(m)}} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{f}_i - \sum_{j=0}^{m} b_j^{(m)} p_j(x_i)\right) p_k(x_i) = 0 \tag{4}$$

Opuszczając w (4) nawiasy i przenosząc wyraz wolny na prawą stronę uzyskujemy zależność .

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(x_i) \sum_{j=0}^{m} b_j^{(m)} p_j(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i p_k(x_i) \tag{5}$$

Wprowadzamy pomocnicze oznaczenia

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i p_k(x_i) \tag{6}$$

$$d_{jk} = \sum_{i=1}^{n} p_k(x_i) p_j(x_i) \tag{7}$$

Po wprowadzeniu (6) i (7) do wzoru (5) otrzymujemy zależność

$$\sum_{j=0}^{m} d_{jk} \cdot b_j^{(m)} = \omega_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{8}$$

Wzór (8) pozwala na wygenerowanie układu równań normalnych, po rozwiązaniu którego otrzymujemy wartości współczynników b_j wielomianu (2).

Celem poprawienia jakości numerycznego rozwiązania układu równań normalnych (8), układ ten na zbiorze punktów $\{x_i\}$ sprowadzamy do postaci diagonalnej. Elementy poza główną przekątną będą wówczas miały wartości równe zeru. Przekształcenie to jest możliwe przy założeniu, że układ wielomianów $\{p_j(x)\}$ jest ortogonalny na zbiorze punktów $\{x_i\}$, tzn. spełnia uwarunkowania

$$\sum_{i=1}^{n} p_j^{(n)}(x_i) p_k^{(n)}(x_i) = 0 \qquad (j \neq k) \tag{9}$$

Górne wskaźniki w (9) informują o zależności wielomianów p_j, p_k od liczby punktów n.

Jeśli wielomiany $p_j(x)$ są ortogonalne, to z (7) wynika, że $d_{jk} = 0$ dla $j \neq k$. Wtedy układ (8) redukuje się do postaci

$$d_{kk} b_k^{(m)} = \omega_k \qquad (k = 0,1,...,m) \tag{10}$$

Układ (10) jest obecnie diagonalny i posiada rozwiązania o prostej postaci

$$b_k^{(m)} = \omega_k / d_{kk} \qquad (k = 0,1,...,m) \tag{11}$$

które nie wymagają konieczności rozwiązywania układu równań liniowych/normalnych.

Podwyższenie rzędu wielomianu m o 1 daje przez analogię rozwiązanie

$$b_k^{(m+1)} = \omega_k / d_{kk} \qquad (k = 0,1,...,m+1) \tag{12}$$

gdzie ω_k i d_{kk} są dane wzorami (6) i (7). Mamy więc zależność

$$b_k^{(m)} = b_k^{(m+1)} \qquad (k = 0,1,...,m) \tag{13}$$

z której wynika, że dla podwyższonego o 1 rzędu wielomianu wystarczy tylko dodatkowo wyznaczyć rozwiązanie dla jednej m+1 niewiadomej $b_k^{(m+1)}$. Aby znaleźć rozwiązanie dla m+1, trzeba więc dodatkowo doliczyć tylko w_{m+1} i $d_{m+1,m+1}$. Z wzoru (13) wynika więc, że wartość b_k w rzeczywistości nie zależy od m, więc górne wskaźniki w naszych rozważaniach można pominąć.

Dla utworzenia rekurencyjnej metody generowania wielomianów ortogonalnych na dyskretnych zbiorach punktów załóżmy, że $\{p(x)\}$ jest dowolnym układem wielomianów spełniającym warunki ortogonalności (9) na zbiorze punktów $\{x_i\}$, w którym – jak przedtem – punkty numerujemy od 1 do n. W pracy (Ralston 1971) wykazano, że zachodzi związek postaci

$$\begin{aligned} & p_{j+1}(x) = (x-\alpha_{j+1})\, p_j(x) - \beta_j\, p_{j-1}(x), \qquad (j = 0,1,...) \\ & p_0(x) = 1, \quad p_{-1}(x) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie α_{j+1} i β_j są stałymi wyrażonymi wzorami

$$\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_{k-1}^2(x_i)} \tag{15}$$

oraz $$\alpha_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_k^2(x_i)} \tag{16}$$

Na podstawie wzoru rekurencyjnego (14) możemy wyznaczyć kolejne wielomiany ortogonalne korzystając z zapisu

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2-\beta_1 & -\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2 & \dots \\ 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1\alpha_2-\beta_1+\alpha_3\alpha_1-\beta_2+\alpha_3\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \dots \\ x^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \dots \\ p_m \end{bmatrix} \tag{17}$$

Na podstawie (17) oraz współczynników b_k określonych za pomocą ogólnej zależności (11), możemy obecnie dla wielomianu aproksymacyjnego szczególnej postaci

$$y_m = \sum_{j=0}^{m} \tilde{b}_j x^j \tag{18}$$

wykorzystując (2), (14) i (17) wyznaczyć współczynniki na podstawie formuły

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2-\beta_1 & -\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2 & \dots \\ 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_1\alpha_2-\beta_1+\alpha_3\alpha_1-\beta_2+\alpha_3\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \\ \dots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{19}$$

Przedstawiona w artykule metoda może być z powodzeniem zastosowana do aproksymacji funkcji zmiennej zespolonej $f(z)$. Wykorzystujemy wówczas kombinację liniową wielomianów

$$z_m = \sum_{j=0}^{m} \left(a_j + ib_j\right) \cdot p_j(z) \tag{20}$$

gdzie

$z = x + iy$

Wielomian $p_j(z)$ ma obecnie postać

$$p_j(z) = \sum_{j=0}^{m} \left(\hat{a}_j + i\hat{b}_j\right) \cdot (x+iy)^j \tag{21}$$

Zasada tworzenia układów równań normalnych oraz rozwiązywania tych układów, jest identyczna jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

Zastosowanie wielomianów ortogonalnych do aproksymacji odwzorowań kartograficznych konforemnych

Dowolne odwzorowanie konforemne powierzchni elipsoidy o równaniu

$$\vec{r} = \vec{r}\left(B,l\right) = \left[\frac{a\cos B\cos l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \frac{a\cos B\sin l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}, \frac{a\left(1-e^2\right)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right]$$

$$\left(B,l\right)\in\omega = \left\{\left(B,l\right): B\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), l\in\left(-\pi,\pi\right)\right\}, l = L - L_0, L_0 = const \tag{22}$$

w płaszczyznę, można przedstawić w postaci funkcji

$$x + iy = f\left(q + il\right) \tag{23}$$

gdzie q jest szerokością geodezyjną izometryczną

$$q = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\sin B}{1-\sin B}\left(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B}\right)^e\right] \qquad \text{a } l=L-L_0. \tag{24}$$

Odwzorowanie (23) możemy aproksymować za pomocą wielomianów postaci

$$x + iy = \sum_{j=0}^{m}\left(a_j + ib_j\right)\cdot p_j\left(z\right) \tag{25}$$

w których

$$p_j(z) = \sum_{k=0}^{j}\left(\hat{a}_k + i\hat{b}_k\right)\cdot\left(q + il\right)^k \tag{26}$$

Mając dany zbiór współrzędnych geodezyjnych (B,L) punktów elipsoidy oraz odpowiadające im współrzędne prostokątne (x,y) w odwzorowaniu, możemy dokonać stosownej aproksymacji tego odwzorowania wielomianami ortogonalnymi.

Algorytmy aproksymacji odwzorowań kartograficznych konforemnych wielomianami ortogonalnymi zostały opracowane w Instytucie Fotogrametrii i Kartografii i mogą być przez autorów udostępnione osobom zainteresowanym.

Przykład zastosowania wielomianów ortogonalnych do aproksymacji funkcji odwzorowawczych układu 1992

Dla wyznaczenia współczynników wielomianów ortogonalnych układu 92 wykorzystano zbiór 256 równomiernie rozmieszczonych na obszarze Polski punktów o znanych współrzędnych geodezyjnych B,L oraz X_{92}, Y_{92}. Uzyskano następujące współczynniki wielomianu aproksymacyjnego stopnia 7:

$\tilde{a}_0$ = -5.28280028736124E+0006 $\qquad$ $\tilde{b}_0$ = 5.00022446393329E+0005

$\tilde{a}_1$ = 6.24838400272692E+0006 $\qquad$ $\tilde{b}_1$ = -1.31074575751003E+0002

$\tilde{a}_2$ = 3.89347500807196E+0005 $\qquad$ $\tilde{b}_2$ = 3.34963503022718E+0002

$\tilde{a}_3$ = -1.72704935927317E+0006 $\qquad$ $\tilde{b}_3$ = -4.89568631798325E+0002

$\tilde{a}_4$ = 6.18612085058813E+0005 $\tilde{b}_4$ = 4.45048108719306E+0002
$\tilde{a}_5$ = 1.41560929274959E+0004 $\tilde{b}_5$ = -2.52585325557494E+0002
$\tilde{a}_6$ = -5.68257064701567E+0004 $\tilde{b}_6$ = 8.28085614480041E+0001
$\tilde{a}_7$ = 1.03201355413574E+0004 $\tilde{b}_7$ = -1.20379498301595E+0001

Są to współczynniki wielomianu o następującej postaci

$$x + iy = \sum_{k=0}^{j} \left(\tilde{a}_k + i\tilde{b}_k\right) \cdot \left(q + il\right)^k \tag{27}$$

Dla rozdzielenia powyższego wielomianu na część rzeczywistą i część urojoną stosujemy następującą zależność rekurencyjną

$$\left[\left(q + il\right)^k = \Psi_k + i\theta_k\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} \Psi_k = q\Psi_{k-1} - l\theta_{k-1} \\ \theta_k = q\theta_{k-1} + l\Psi_{k-1} \end{bmatrix} \tag{28}$$

gdzie Ψ_k i θ_k są wielomianami harmonicznymi generowanymi na podstawie wielomianów zerowego rzędu.

Wówczas wielomian (27) możemy zapisać w postaci związku

$$x + iy = \sum_{k=1}^{j} \left(\tilde{a}_k + i\tilde{b}_k\right)\left(q + il\right)^k = \sum_{k=1}^{j} \left[\left(\tilde{a}_k \Psi_k - \tilde{b}_k \theta_k\right) + i\left(\tilde{a}_k \theta_k + \tilde{b}_k \Psi_k\right)\right] \tag{29}$$

a po rozdzieleniu na część rzeczywistą i urojoną w postaci związków bezpośrednio określających x i y

$$x = \sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_k \Psi_k - \tilde{b}_k \theta_k \tag{30}$$

$$y = \sum_{k=1}^{j} \tilde{a}_k \theta_k + \tilde{b}_k \Psi_k$$

Obliczone współczynniki wielomianu 7 stopnia pozwalają na efektywne wyznaczanie wartości współrzędnych prostokątnych płaskich x,y w układzie 1992 z dokładnością ~ 0,5 mm na obszarze Polski.

Wyniki obliczeń testowych zamieszczono w tabeli. Znajdują się w niej współrzędne elipsoidalne B,L oraz współrzędne prostokątne płaskie X_{92}, Y_{92} w układzie 1992 wyliczone z zależności odwzorowawczych i wykorzystane do aproksymacji oraz współrzędne prostokątne X_{apx}, Y_{apx} wyznaczone z wykorzystaniem wyznaczonego wielomianu aproksymacyjnego.

Podsumowanie

W artykule zreferowano metodę aproksymacji funkcji wielomianami ortogonalnymi. Polega ona na wyznaczeniu wartości współczynników wielomianów z wykorzystaniem dyskretnych zbiorów punktów. Zastosowanie wielomianów ortogonalnych pozwala na ominięcie uciążliwego procesu układania i rozwiązywania układów równań normalnych przez wygenerowanie współczynników wielomianu ortogonalnego w prostym procesie rekurencyjnym. W artykule przedstawiono również przykładowe zastosowanie tej metody do aproksymacji funkcji odwzorowawczych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera układzie „1992”. Zaprezentowana metoda może znaleźć zastosowanie w pracach związanych z użytkowaniem układów współrzędnych w geodezji i kartografii, w tym do obliczeń skali m, zbieżności południków γ, a także wartości redukcji odwzorowawczych.

Tabela. Współrzędne prostokątne w układzie 1992 obliczone za pomocą zależności odwzorowawczych oraz wielomianu (30)

B	*L*	X_{92}	Y_{92}	X_{apx}	Y_{apx}
49.0000	14.0000	137878.5195	134461.7021	137878.5196	134461.7019
49.0000	15.0000	133537.1303	207550.6619	133537.1301	207550.6618
49.0000	16.0000	130162.6745	280652.1491	130162.6743	280652.1493
49.0000	17.0000	127753.5173	353762.9557	127753.5173	353762.9561
49.0000	18.0000	126308.4905	426879.9391	126308.4907	426879.9394
49.0000	19.0000	125826.8928	500000.0000	125826.8931	500000.0001
49.0000	20.0000	126308.4905	573120.0609	126308.4908	573120.0608
49.0000	21.0000	127753.5173	646237.0443	127753.5175	646237.0441
49.0000	22.0000	130162.6745	719347.8509	130162.6745	719347.8507
49.0000	23.0000	133537.1303	792449.3381	133537.1302	792449.3381
49.0000	24.0000	137878.5195	865538.2979	137878.5194	865538.2979
50.0000	14.0000	248953.5232	141851.1522	248953.5232	141851.1522
50.0000	15.0000	244636.2912	213458.0718	244636.2912	213458.0718
50.0000	16.0000	241280.4699	285080.2843	241280.4699	285080.2844
50.0000	17.0000	238884.5405	356713.8921	238884.5405	356713.8922
50.0000	18.0000	237447.4173	428355.0610	237447.4174	428355.0612
50.0000	19.0000	236968.4487	500000.0000	236968.4488	500000.0001
50.0000	20.0000	237447.4173	571644.9390	237447.4174	571644.9390
50.0000	21.0000	238884.5405	643286.1079	238884.5406	643286.1079
50.0000	22.0000	241280.4699	714919.7157	241280.4700	714919.7156
50.0000	23.0000	244636.2912	786541.9282	244636.2912	786541.9283
50.0000	24.0000	248953.5232	858148.8478	248953.5231	858148.8480
51.0000	14.0000	360033.1851	149349.9311	360033.1851	149349.9312
51.0000	15.0000	355745.3660	219453.1684	355745.3659	219453.1685
51.0000	16.0000	352412.2671	289574.3149	352412.2671	289574.3150
51.0000	17.0000	350032.4855	359708.8205	350032.4855	359708.8206
51.0000	18.0000	348605.0180	429852.1976	348605.0180	429852.1976
51.0000	19.0000	348129.2624	500000.0000	348129.2625	500000.0000
51.0000	20.0000	348605.0180	570147.8024	348605.0181	570147.8024
51.0000	21.0000	350032.4855	640291.1795	350032.4856	640291.1795
51.0000	22.0000	352412.2671	710425.6851	352412.2672	710425.6851
51.0000	23.0000	355745.3660	780546.8316	355745.3661	780546.8316
51.0000	24.0000	360033.1851	850650.0689	360033.1853	850650.0690
52.0000	14.0000	471117.4797	156955.7623	471117.4797	156955.7624
52.0000	15.0000	466864.2924	225534.1378	466864.2924	225534.1379
52.0000	16.0000	463557.9762	294132.8844	463557.9761	294132.8845
52.0000	17.0000	461197.2429	362746.8389	461197.2429	362746.8389
52.0000	18.0000	459781.1717	431370.8983	459781.1717	431370.8983
52.0000	19.0000	459309.2094	500000.0000	459309.2094	500000.0000
52.0000	20.0000	459781.1717	568629.1017	459781.1717	568629.1017
52.0000	21.0000	461197.2429	637253.1611	461197.2430	637253.1611
52.0000	22.0000	463557.9762	705867.1156	463557.9763	705867.1155
52.0000	23.0000	466864.2924	774465.8622	466864.2926	774465.8621
52.0000	24.0000	471117.4797	843044.2377	471117.4800	843044.2376
53.0000	14.0000	582206.3757	164666.3354	582206.3755	164666.3356
53.0000	15.0000	577992.9964	231699.1384	577992.9962	231699.1385
53.0000	16.0000	574717.4902	298754.6159	574717.4901	298754.6159
53.0000	17.0000	572378.6829	365827.0310	572378.6828	365827.0310

cd. tabeli

53.0000	18.0000	570975.7348	432910.7055	570975.7347	432910.7055
53.0000	19.0000	570508.1415	500000.0000	570508.1414	500000.0000
53.0000	20.0000	570975.7348	567089.2945	570975.7348	567089.2944
53.0000	21.0000	572378.6829	634172.9690	572378.6829	634172.9689
53.0000	22.0000	574717.4902	701245.3841	574717.4902	701245.3840
53.0000	23.0000	577992.9964	768300.8616	577992.9964	768300.8614
53.0000	24.0000	582206.3757	835333.6646	582206.3758	835333.6642
54.0000	14.0000	693299.8361	172479.3080	693299.8358	172479.3080
54.0000	15.0000	689131.3916	237946.3022	689131.3914	237946.3022
54.0000	16.0000	685890.6852	303438.1115	685890.6850	303438.1115
54.0000	17.0000	683576.6549	368948.4668	683576.6548	368948.4667
54.0000	18.0000	682188.5410	434471.1548	682188.5409	434471.1548
54.0000	19.0000	681725.8871	500000.0000	681725.8870	499999.9999
54.0000	20.0000	682188.5410	565528.8452	682188.5410	565528.8451
54.0000	21.0000	683576.6549	631051.5332	683576.6549	631051.5332
54.0000	22.0000	685890.6852	696561.8885	685890.6851	696561.8884
54.0000	23.0000	689131.3916	762053.6978	689131.3915	762053.6977
54.0000	24.0000	693299.8361	827520.6920	693299.8358	827520.6918
55.0000	14.0000	804397.8179	180392.3056	804397.8182	180392.3055
55.0000	15.0000	800279.3797	244273.7346	800279.3796	244273.7348
55.0000	16.0000	797077.4205	308181.9536	797077.4203	308181.9536
55.0000	17.0000	794790.9883	372110.2024	794790.9881	372110.2023
55.0000	18.0000	793419.4018	436051.7748	793419.4017	436051.7746
55.0000	19.0000	792962.2518	500000.0000	792962.2518	499999.9998
55.0000	20.0000	793419.4018	563948.2252	793419.4018	563948.2251
55.0000	21.0000	794790.9883	627889.7976	794790.9883	627889.7975
55.0000	22.0000	797077.4205	691818.0464	797077.4205	691818.0464
55.0000	23.0000	800279.3797	755726.2654	800279.3797	755726.2653
55.0000	24.0000	804397.8179	819607.6944	804397.8179	819607.6946

Literatura

Ralston A., 1971: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa.

Summary

In the paper, an approximation method is presented, which uses orthogonal polynomials. Coefficients of polynomials are determined by recurrence formulas on discrete sets of points. Utilization of orthogonal polynomials allows to avoid creation and solving of normal equation systems. In the paper application of the method to map projection approximation function in "1992" system is also presented. The method may be used in geodesy and cartography for obtaining map projection approximation functions, and calculating elementary scale, convergence and geodetic reductions.

dr hab. inż. Jerzy Balcerzak
j.balcerzak@gik.pw.edu.pl
tel. (022) 660 55 90

dr inż. Paweł Pędzich,
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel. 022) 660 55 90