POLSKIE TOWARZYSTWO INFORMACJI PRZESTRZENNEJ
ROCZNIKI GEOMATYKI 2004 ❍ TOM II ❍ ZESZYT 2

GRAFY JAKO NARZĘDZIE DO DEFINIOWANIA RELACJI TOPOLOGICZNYCH POMIĘDZY DANYMI PRZESTRZENNYMI

GRAPHS AS A TOOL FOR DEFINING TOPOLOGICAL RELATIONSHIPS BETWEEN SPATIAL DATA

Elżbieta Lewandowicz

Katedra Geodezji Szczegółowej Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie

Słowa kluczowe: grafy, relacje przestrzenne, relacje topologiczne
Keywords: graphs, spatial relations, topological relations

Wprowadzenie

Przeglądając literaturę matematyczną w poszukiwaniu narzędzi do określania przestrzennych relacji, zatrzymałam się na teorii grafów (Wilson 2000; Kulikowski 1986; Ross, Wright 2000). Powstanie tej teorii wiąże się z pewnym historycznym problemem z zakresu analizy przestrzennej. W XVIII w. mieszkańców Królewca zainteresowało zadanie: zaplanować trasę wycieczki przez centrum miasta w taki sposób, by przez każdy z siedmiu mostów na Pregole i jej odnogach można było przejść dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjścia. Rozwiązanie tego zadania jest dostępne w literaturze (Kulikowski 1986).

Obecnie w podręcznikach matematycznych (Ross, Wright, 2000) i informatycznych (Loudon 1999; Gedgewick 2003) grafy mają swoją ustaloną pozycję. W oparciu o nie rozwiązuje się typowe zadania związane z analizą przestrzenną: problem konwojażera, analizę dróg, przepływy w sieciach (Reingold i inn. 1998; Grover, 2003; Wilson 2000; Ford, Fulkerson 1969).

W systemach informacji geograficznej (GIS) przy modelowaniu danych przestrzennych (Molenaar 1998) teorię grafów wykorzystuje się do wizualizacji danych topologicznych. Za pomocą grafów przedstawia się relacje sąsiedztwa między obiektami w przyjętych topologicznych modelach sieciowych i obszarowych. Proponuje się wykorzystanie teorii grafów do opisu cech danych przestrzennych. (Bera, Claramunt 2003).

W literaturze krajowej związanej z GIS brakuje opracowań, które przybliżałyby podstawy matematyczne opisu topologicznego danych przestrzennych. W tej publikacji zamierzam przedstawić brakujące informacje o grafach w oparciu o własny prosty przykład danych przestrzennych. Przyjmując za narzędzie do określenia zależności przestrzennych kompleksu obiektów (punktów granicznych i linii granicznych działek), pokazuję sposób zapisu ich relacji topologicznych w macierzach sąsiedztwa i incydencji. Sieć linii granicznych można zapisać w różny sposób, w zależności od potrzeb użytkowników. W pracy przedstawiam zapis macierzowy, który pozwala na automatyczne przetwarzanie istniejącej postaci danych topologicznych do nowych postaci. Proponuję własny algorytm przetwarzania danych topologicznych zbioru linii granicznych. Pokazuję też, że w oparciu o sieć linii granicznych przedstawioną za pomocą grafu planarnego można uzyskać grafy w postaci cykli opisujących obszary, oraz graf dualny przedstawiający sąsiedztwo obszarów. Dostępne w literaturze algorytmy (Gedgewick 2003; Sysło i in. 1995) ułatwiają wykonanie tych zadań.

Podstawowe informacje o grafach

Graf przedstawia pewien zbiór punktów i pokazuje w jaki sposób są one połączone, ale nie uwzględnia własności metrycznych połączeń. Z matematycznego punktu widzenia (Wilson 2000) grafy są obiektami abstrakcyjnymi, opisanymi przez trójki uporządkowanych danych:

$$G = [W, K, j]$$

gdzie: W jest zbiorem węzłów, K jest przeliczalnym zbiorem krawędzi, a φ jest odwzorowaniem na iloczynie kartezjańskim w postaci:

$$\varphi : W(G) \times W(G) \rightarrow K$$

wskazującym na węzły przynależne do krawędzi, gdyż krawędzie zaczynają się i kończą w węzłach. Odwzorowanie φ, zwane relacją sąsiedztwa, jest relacją symetryczną i zwrotną. Jeżeli jest sąsiedztwo między węzłami w_1 w_2, to jest także sąsiedztwo między w_2 w_1, czyli:

$$(w_1 w_2) \in \varphi \Rightarrow (w_2 w_1), \in \varphi$$

Relację sąsiedztwa j można zapisać za pomocą macierzy sąsiedztwa, która jest macierzą symetryczną o wymiarze $n \times n$, gdzie n jest liczbą węzłów grafu. Tworząc taką macierz musimy oznaczyć węzły, np. liczbami ze zbioru $\{1,2,...n\}$. Wyraz macierzy o indeksach i, j odpowiada liczbie krawędzi łączącej węzeł w_i z węzłem w_j.

Odwzorowanie φ można przedstawić także jako funkcję incydencji γ:

$$\varphi = \gamma(K(G)) \subseteq W(G) \times W(G)$$

która definiuje krawędzie grafu $k \in K(G)$, jeśli:

$$\gamma(k) = \left\{ \begin{matrix} \text{węzeł dwóch krawędzi} \\ \text{koniec krawędzi} \end{matrix} \right\}$$

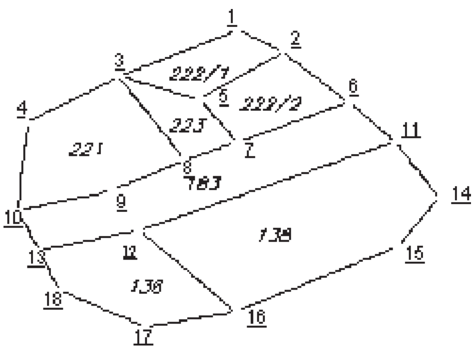
Funkcję tę zapisuje się za pomocą macierzy incydencji M, która zawiera zależności między krawędziami a węzłami. Utworzymy ją, jeśli krawędzie grafu oznaczymy liczbami, np. ze zbioru {1, 2, ... m}. Za pomocą takiej macierzy o wymiarze n x m opisujemy graf: wyraz o indeksach i, j jest równy 1, jeśli węzeł w_i jest incydenty z krawędzią k_j, w przeciwnym razie jest równy 0.

Wizualizacja danych przestrzennych za pomocą grafów

Graficzną postać przestrzennych danych geograficznych można odczytać jako graf. Przyjmując, że punkty to węzły a linie to krawędzie, otrzymujemy graf. W tym grafie węzły mają określone położenie geometryczne. W literaturze przedmiotu (Kulikowski 1986) grafy rozpatrywane jako figury w przestrzeni geometrycznej nazywa się grafami geometrycznymi. Mają one dodatkowe cechy wynikające z własności przestrzeni, w której są rozważane.

Spróbujmy skorzystać z możliwości przedstawienia przykładowych danych geograficznych za pomocą grafu opisanego macierzą sąsiedztwa i incydencji.

Fragment mapy ewidencyjnej (rys. 1) stanowi przykład podziału terytorialnego kraju. Dane zobrazowane na mapce spróbujmy przedstawić jako graf i zapisać za pomocą macierzy sąsiedztwa i incydencji.



Rys. 1. Fragment mapy ewidencyjnej jako przykład jednostek podziału terytorialnego kraju

Zapis relacji przestrzennych za pomocą macierzy sąsiedztwa

Mapę jako obraz terenu można przekształcić do postaci grafu. Dowodem tego niech będzie rysunek 2, który obrazuje tę samą treść co rysunek 1. Działki ewidencyjne są przedstawione jako graf zwykły G=[W,K,φ], składający się z węzłów $w_i \in W$ i krawędzi $k_{ij} \in K$, i, j ∈ {1,2,3,...n}. Liczba węzłów w tym grafie – n odpowiada liczbie punktów granicznych. Krawędzie obrazują linie graniczne oparte o dwa sąsiednie punkty graniczne. Odwzorowanie φ określa krawędzie oparte o wybrane dwa węzły.

Ten graf można zapisać w formie macierzowej. Zgodnie z przedstawionymi wyżej podstawami teoretycznymi, zapis macierzowy grafu można zbudować, jeśli węzłom przyporządkujemy identyfikatory. Przyjmijmy, że tymi identyfikatorami będą numery punktów granicznych. Prezentowaną macierz sąsiedztwa utworzono w oparciu o rysunek 2. Wyrazy tej macierzy przyjmują tylko dwie wartości – 0 lub 1. Wartość wyrazu a_{ij} informuje, czy jest krawędź między węzłami i-j; jeśli tak, to wyraz macierzy przyjmuje wartość 1. Macierz sąsiedztwa grafu jest zawsze macierzą symetryczną, dlatego krawędzie między dwoma węzłami zapisane są w niej dwukrotnie jako krawędzie skierowane k_{12} oraz k_{21}.

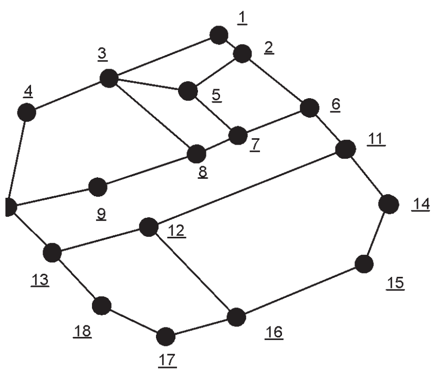
Sumując wartość kolumn lub wierszy w macierzy sąsiedztwa można otrzymać informację o ilości krawędzi wychodzących z węzła, tzw. stopniu węzła – deg(w). Opisany graf zawiera tylko węzły stopnia 2, 3, 4 (deg(w) = {2, 3, 4}). Wynika to ze specyfiki przedstawionych danych. Ta forma obrazu działek nie powinna zawierać węzłów stopnia 0 (deg(w) ≠ 0), które nazywa się węzłami odosobnionymi, i węzłów o stopniu 1, (deg(w) ≠ 1), które związane są tylko z jedną krawędzią, ponieważ węzły przedstawiają punkty graniczne, które muszą być związane z co najmniej dwoma liniami granicznymi. Można określić, jakie stopnie węzłów mogą występować przy zapisie określonych danych geograficznych za pomocą grafu. Skutki określenia stopni węzłów deg(w) powinny być bardzo przydatne przy sprawdzaniu poprawności danych zapisanych w bazach danych.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 identyfikatory punktw

$$\begin{array}{ccc}
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18\end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix} &
\begin{matrix}2\\3\\4\\2\\3\\3\\3\\3\\2\\3\\3\\3\\3\\2\\2\\3\\2\\2\end{matrix}
\end{array}$$

2 3 4 2 3 3 3 3 2 3 3 3 3 2 2 3 2 2

← deg(w) - stopnie wzBw



Rys. 2. Obraz działek przedstawiony w formie grafu i zapisany za pomocą macierzy sąsiedztwa z określonymi stopniami węzłów

Działki ewidencyjne przedstawione na rysunku 1 można przedstawić również za pomocą grafu, którego krawędzie obrazują granice między działkami (rys.3). W takim przypadku w grafie mogą występować węzły o stopniu deg(w)>2. Graf ten można uzyskać z przekształcenia grafu przedstawionego na rysunku 2, poprzez redukcję węzłów o deg(w)=2 związaną z sumowaniem sąsiednich krawędzi. Zapis macierzowy tak uproszczonego grafu otrzymuje się redukując w macierzy kolumny i wiersze odpowiadające węzłom deg(w)=2 i równocześnie modyfikując krawędzie. Proces redukcji macierzy sąsiedztwa proponuję przeprowadzić następującymi kolejnymi etapami:

- Określenie deg(w) stopni wszystkich węzłów w grafie i określenie podzbioru R węzłów stopnia 2, co można zapisać:

$$\text{dla } i=\{1,2,3,..n\} \qquad \deg(w_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

$$\text{jeśli } \deg(w_i)=2, \qquad w_i \in R \subset W$$

- wybranie podzbioru $K_2 \subseteq K$ krawędzi opartych o choć jeden węzeł stopnia 2:

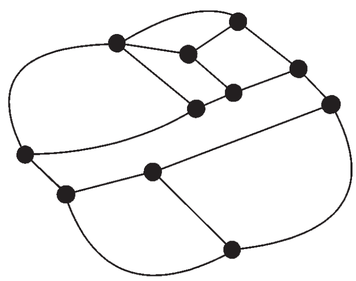
$$k_{ij} \in K_2 \quad \text{jeśli} \quad w_i(k_{i,j}) \in R.$$

- w oparciu o zbiór K_2 wygenerowanie nowych krawędzi w macierzy sąsiedztwa, które będą sumą dwóch sąsiednich krawędzi $k_{ij} = k_{ia} \cup k_{aj}$ oraz $k_{ji} = k_{ja} \cup k_{ai}$, gdzie a jest identyfikatorem węzła 2 stopnia: $\{a{=}i\colon w_i \in R\}$

- usunięcie z macierzy sąsiedztwa i-ego wiersza i i-tej kolumny, dla każdego i takiego, że $w_i \in R$.

Uproszczony obraz i zapis działek – jedna krawędź odpowiada granicy między dwiema działkami – jest wygodny dla analiz sąsiedztwa działek.

$$
\begin{array}{c c}
\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 16 \end{matrix} & \leftarrow \text{identyfikatory wêz³ów} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \\
& \uparrow \\
\begin{matrix} 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} & \leftarrow \text{deg(w)}
\end{array}
$$



Rys. 3. Obraz działek na grafie zredukowanym o węzły stopnia 2. Zapis tego grafu w formie macierzy sąsiedztwa

Zapis relacji przestrzennych za pomocą macierzy incydencji

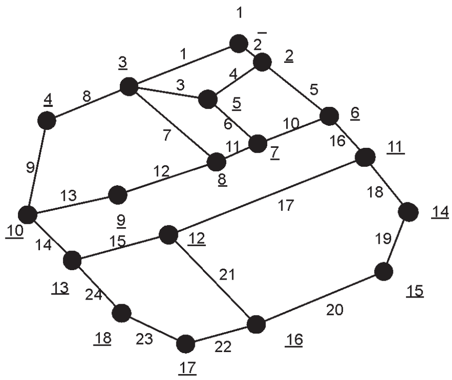
Zapis danych geograficznych, które są obrazowane za pomocą grafu, może być przedstawiony za pomocą macierzy incydencji opisanej funkcją γ. Macierz incydencji, w odniesieniu do macierzy sąsiedztwa, jest innym sposobem przedstawienia tych samych danych: $\varphi = \gamma(K(G))$. Macierz taka budowana jest w oparciu o znane identyfikatory krawędzi i węzłów. W celu ilustracji nowego procesu na rysunku 4 oznaczono odpowiednio krawędzie i węzły. Macierz, zbudowana w oparciu o przedstawiony na rysunku 4 graf, przyporządkowuje krawędziom węzły będące początkiem i końcem krawędzi. W tym grafie wszystkie węzły są zakończeniowe, mają stopień większy od 1.

Kolejnymi przykładami zapisu danych geograficznych za pomocą grafu mogą być przedstawienia w podobnej formie innych jednostek podziału terytorialnego kraju, a także innych obiektów geograficznych.

← identyfikatory krawêdzi

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	**1**	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**1**	0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**

↑ identyfikatory wêz³ów



Rys. 4. Obraz działek przedstawiony za pomocą grafu z oznaczonymi węzłami i krawędziami. Zapis tego grafu za pomocą macierzy incydencji

Grafy jako nośniki danych topologicznych

Na podstawie przedstawionego prostego przykładu można zauważyć, że macierz sąsiedztwa oraz macierz incydencji przechowują dane o zależnościach topologicznych między węzłami i krawędziami. Wiedząc, że węzły i krawędzie opisują elementy geometryczne mapy, dostrzeżemy, że w macierzach (sąsiedztwa i incydencji) zapisane są relacje między elementami geometrycznymi.

W macierzy sąsiedztwa są zapisane takie relacje topologiczne: między jakimi punktami (węzłami) jest linia (krawędź) oraz ile linii (krawędzi) wychodzi z punktu (węzła). Macierz incydencji niesie informacje, na których punktach (węzłach) opiera się określona linia (krawędź). Są to dane topologiczne, które tradycyjnie zapisuje się w rekordach baz danych. Dane w macierzach odnoszą się do całego kompleksu np. działek. Ta skumulowana forma zapisu jest bardzo przydatna do analiz przestrzennych.

Obraz jednostek podziału terytorialnego kraju za pomocą grafu planarnego

Dane związane z podziałem terytorialnym kraju są specyficznymi danymi, gdyż całkowicie pokrywają powierzchnię przestrzeni, bez jakichkolwiek odstępów, dziur czy zakładek. Dane te powinny być obrazowane za pomocą specjalnych grafów – planarnych, spójnych o deg(w)>1. Graf planarny to taki graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć – tak by żadne dwie krawędzie nie przecinały się na rysunku poza węzłami (Wilson 2000; Kulikowski 1986).

Obszary w grafie planarnym

Przyjmuje się (Wilson 2000), że graf planarny geometryczny, w postaci płaskiego rysunku, dzieli zbiór punktów płaszczyzny na obszary (ściany) f_i, gdzie: $\{f_i\} \in F$, a F jest zbiorem obszarów grafu G, i={1,2,...f).

Tworząc graf planarny na podstawie rysunków 1 i 2, można zdefiniować odpowiednio 8 obszarów pokazanych na rysunku 5. Zauważmy, że definiując obszary oznacza się dodatkowo obszar nieograniczony (nieskończony) f_8, będący obszarem na zewnątrz rysunku grafu. Definiowanie obszarów w grafie jest przekształceniem:

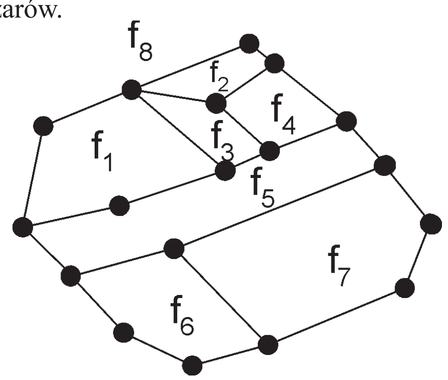
$$\phi : K(G) \rightarrow F(G)$$

Liczbę obszarów można określić w oparciu o liczbę zdefiniowanych węzłów (n), krawędzi (m), na podstawie twierdzenia Eulera:

Twierdzenie Eulera: Niech G będzie rysunkiem płaskim spójnego grafu płaskiego i niech n, m i f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków (węzłów), krawędzi i ścian (obszarów) grafu G. Wtedy:

$$n-m+f=2$$

W rozpatrywanym przykładzie n=18, m=24, czyli, zgodnie z powyższym wzorem, powinno się określić 8 obszarów.



Rys. 5. Przedstawienie obszarów f_i na podstawie grafu planarnego

Wyspy (enklawy), mosty

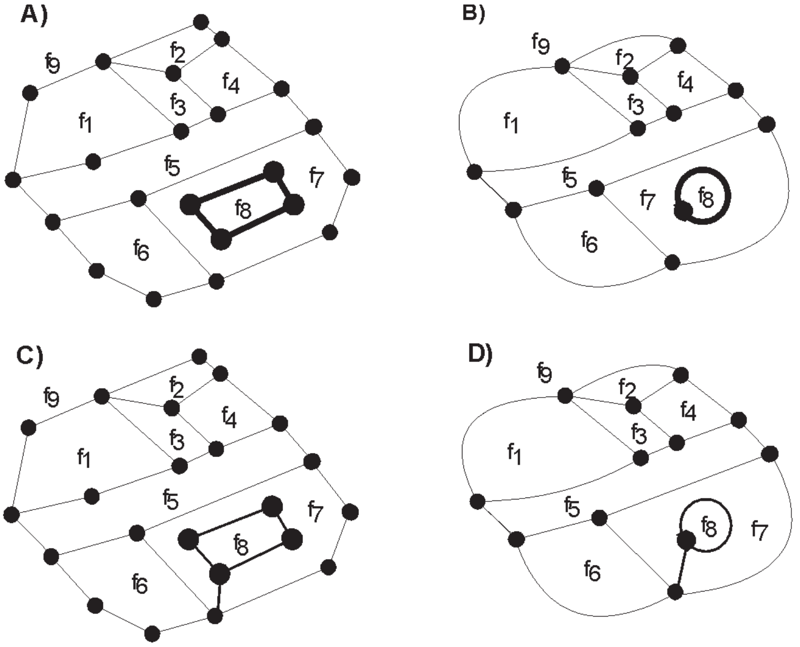
Jednostki podziału terytorialnego kraju często są określone jako obszary z enklawami. Przyjmijmy, że wewnątrz działki o numerze ewidencyjnym 138 (rys. 1) wydzielono nową działkę Przedstawienie tej sytuacji za pomocą grafów, będzie wyglądać tak jak na rysunku 6, na którym ukazano działki w dwojaki sposób: A) pełny, B) uproszczony. Przedstawione grafy A i B składają się z dwóch rozłącznych podgrafów (na rysunku 6 wyróżniono je krawędziami o różnej grubości). Enklawa (wyspa) stanowi oddzielny podgraf; nie jest zespolona z obrazem innych działek. W takim przypadku, mówi się o grafie planarnym, składającym się z dwóch niezależnych podgrafów.

W tym przypadku, można sprawdzić prawidłowość zdefiniowania obszarów, według zmodyfikowanego wzoru Eulera:

$$n\text{-}m + f = a+1,$$

gdzie: a jest liczbą niezależnych podgrafów występujących w grafie. Definiując obszary, należy uważać, aby więcej niż jeden raz nie uwzględnić obszarów zewnętrznych. W grafie pokazanym na rysunku 6 A) – składającym się z: 2 podgrafów, 22 węzłow i 28 krawędzi – określono 9 obszarów. Podobna zgodność występuje w grafie przedstawionym na rysunku 6 B).

Traktując wyspy jako oddzielne podgrafy, należy je przypisać obszarowi, na którym się znajdują. Algorytm takiego postępowania w przypadku grafu geometrycznego jest stosunkowo prosty.



Rys. 6. Obszar f_8 jako enklawa (wyspa) przedstawiona w grafie w różnych postaciach.:
A) sposób pełny ukazujacy wszystkie punkty graniczne jako węzły, B) w sposób uproszczony.
W grafie C) i D) enklawa jest przedstawiona jako wyspa z mostem.
Grafy A), B) są sumą dwóch spójnych podgrafów.

Wyspy, zdefiniowane jako oddzielne grafy, można połączyć z obszarem otaczającym tzw. mostami. Przez mosty rozumiemy krawędź łączącą węzeł wyspy z węzłem otaczającego obszaru, w taki sposób, aby most nie przecinał żadnej innej krawędzi grafu.

Powstanie mostu zmienia sytuację przestrzenną. Już trudno mówić o enklawach (wyspach). Po dodaniu mostu otrzymuje się graf spójny. Przykłady takich grafów przedstawiono na rys. 6 C), D). Dla nich obszary będą definiowane tak jak w grafie planarnym spójnym. Krawędziom definiującym most powinno się przypisać specjalną cechę, która będzie te krawędzie wyróżniać ale może pozwolić jednocześnie rysować tą krawędź np. kolorem otoczenia, by czynić ją niewidoczną w wybranych prezentacjach.

Obszary jako cykle

Obszary jako elementy zbioru F zdefiniowane na grafie G = [W, K, φ] można opisać za pomocą grafów w postaci cykli posługując się odwzorowaniem:

$$F = \phi\ (G) = [W, K, \phi] = \bigcup_{i=1}^{f} [W_i, K_i, \alpha] = \bigcup_{i=1}^{f} C_i$$

gdzie: $W_i \subseteq W$ oraz $K_i \subseteq K$. Odwzorowanie φ jest równoważne sumie odwzorowań α. W efekcie otrzymuje się sumę cykli zbudowanych na podzbiorach W_i. Zbiór Wi za pomocą odwzorowania α jest przekształcany w ciąg węzłów $(w_i, w_{i+n}, w_{i+m}, ..w_i)$, w którym tylko węzeł pierwszy jest identyczny z węzłem ostatnim. Odwzorowanie α każdej parze sąsiadujących węzłów w ciągu $(w_i,\ w_{i+n},\ w_{i+m},\ ...w_i)$ przypisuje krawędzie ze zbioru $k_{ij} \subseteq K(G)$ oparte o te węzły.

Te właściwości grafów planarnych są bardzo przydatna, gdy na podstawie granic widocznych na mapie należy zdefiniować obszary jednostek podziału terytorialnego posługując się ciągiem punktów granicznych je wyznaczających, przy czym każdym sąsiednim punktom w tym ciągu przyporządkowuje się linie graniczne określone punktami granicznymi.

Sąsiedztwo obszarów zapisane za pomocą grafu dualnego

Graf dualny D_G (Kulikowski 1986) jest przekształceniem grafu planarnego G, w którym deg (w) ≥ 3. Opisuje się to przekształcenie jako funkcję σ:

$$\sigma\ (G) \rightarrow D_G$$

Funkcja σ odwzorowuje obszary na węzły:

$$\sigma\ (F(G)) \rightarrow W\ (D_G)$$

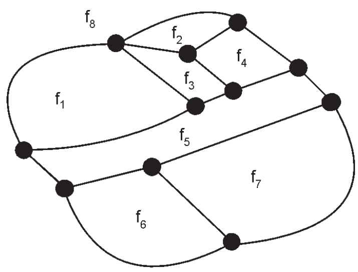
Za pomocą funkcji σ krawędzie sąsiadujących obszarów $k = f_i \cap f_j$ są przekształcane na krawędzie grafu dualnego:

$$\sigma\ (K(G)) \rightarrow K\ (D_G)$$

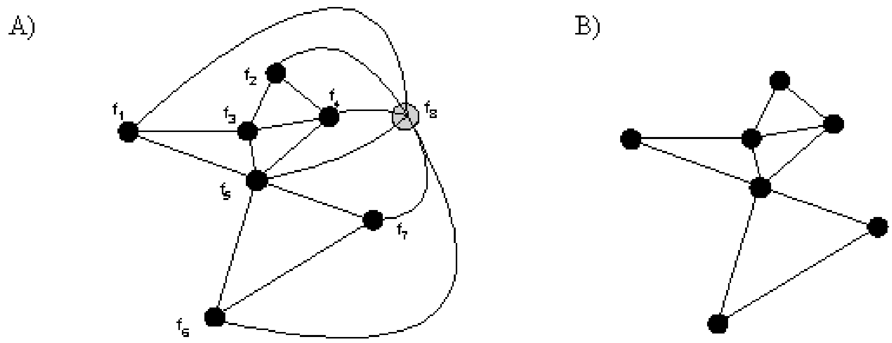
Graf G (rys.7) obrazujący działki ewidencyjne przekształcono na graf dualny D_G. Przedstawiono go na rysunku 8 w dwóch postaciach: w pełnej treści grafu dualnego z uwzględnieniem obszaru zewnętrznego f_8 oraz z jego pominięciem. Takie przedstawienie obszarów ułatwia analizy sąsiedztwa dla konkretnych zastosowań. Stopień węzła deg(w), gdzie w $\subseteq W(D_G)$ informuje o ilości sąsiadów, ale tylko sąsiadów graniczących wspólną krawędzią. Cechy sąsiedztwa przypisane krawędzi mogą charakteryzować rodzaj sąsiedztwa.

Analiza sąsiedztwa oparta o graf dualny nie uwzględnia sąsiadujących obszarów na skos. Sąsiedztwo obszarów f_1 i f_2 z rysunku 7 nie jest uwzględnione w grafie dualnym. Chcąc je uwzględnić, należy zmodyfikować tradycyjne algorytmy i uwzględniać wartości $f_i \cap f_j = \{w\}$ przy definiowaniu krawędzi grafu D_G.

Macierz incydencji grafu dualnego opisująca zależności między krawędziami a węzłami zawiera dane, które można przenieść do grafu pierwotnego G w formie dodatkowego opisu



Rys. 7. Graf, przyjazny do analiz sąsiedztwa, przedstawiający działki jako obszary w grafie uproszczonym



Rys. 8. Działki przedstawione za pomocą grafu dualnego DG względem grafu G przedstawionego na rysunku 7. Działkę obrazuje węzeł, krawędź między węzłami przedstawia sąsiedztwo między działkami. Rys. A) przedstawia graf dualny z uwzględnieniem obszaru f_8. Rys. B) graf zredukowany o węzeł obrazujący obszar f_8 i krawędzie wychodzące z tego węzła

cech krawędzi. Pozwolą one przypisywać krawędziom grafu G przyległe obszary. Ta cecha grafu dualnego jest bardzo przydatna i powinna być wykorzystywana do notowania topologii obszarów.

Wnioski

Na podstawie każdej mapy człowiek widzi relacje topologiczne występujące między zobrazowanymi obiektami. Pokazano w pracy, że mapę można zinterpretować jako graf. Grafy ułatwiłby automatyczne, komputerowe wykonywanie opisów relacji topologicznych. Zapisy ich w macierzach tworzą jednorodne zbiory danych topologicznych dużego kompleksu danych przestrzennych, co stwarza możliwość automatycznego przetwarzanie danych. Proponowane algorytmy (własne i dostępne w literaturze informatycznej) pozwalają, wychodząc od zapisu relacji topologicznych linii granicznych kompleksu działek, otrzymać istniejące relacje topologiczne granic i obszarów na mapie.

Proponowana propozycja macierzowego zapisu relacji topologicznych powinna uzupełniać, powszechnie stosowane, graficzne przedstawianie modeli topologicznych za pomocą grafów.

Literatura

Bera R., Claramunt C., 2003:*Topology-based proximities in spatial systems.* Journal of Geographical Systems. Springer-Vertag 2003 - 5- s. 353-379.

Ford L.R., Fulkerson D.R., 1969: *Przepływy w sieciach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Gedgewick R.,2003: *Algorithms Jave.* Addison Wesley.

Grover W., D., 2003: *Mesh-Based Survivable Networks.* Prentice Hall PTR.

Kulikowski J., L., 1986: *Zarys teorii grafów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.

Loudon K., 1999: *Mastering algorithms with C.* O'Reilly.

Molenaar M., 1998: *An introduction to the theory of spatial object modeling for GIS.* Taylor & Francis.

Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S, 1995: *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL***,** Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Reingold E.M., Nievergeld J., Deo N., 1998: *Algorytmy kombinatoryczne*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ross K. A., Wright Ch.R. B., 2000: *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa.

Urbański J., 1997: *Zrozumieć GIS, Analiza informacji przestrzennej*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.

Wilson R., 2000: *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.

Summary

Graphs are abstract mathematical objects enabling to describe data in a simple form. The graph theory provides tools for solving specialized tasks, including typical problems related to spatial analysis: travelling salesman problem, path analysis, network flow. This paper discusses the possibility of applying graphs to determine topological data of a complex of geographical objects. A geometric graph has been constructed on the basis of a map fragment showing registration parcels. Its nodes represent boundary points, and edges – boundary lines. The neighborhood matrix describing this graph contains topological data, i.e. relationships between boundary points and lines. Traditionally, these data are saved as database records and associated with single objects.The above matrix contains all data concerning the whole complex of objects, which enables their processing. An algorithm transforming a graph representing boundary lines into a graph describing boundaries is proposed in the paper. This transformation involves reduction of 2-degree nodes, connected with summation of neighboring edges. In the transformed graph edges describe boundaries between two parcels.

The data related to the administrative division of a country are specific, as they cover the spatial area completely, without any intervals, blanks or overlaps. These data should be illustrated using special planar graphs. A planar graph is a graph that can be embedded in a plane so that no edges intersect. An example may be a graph representing registration parcels. A geometric planar graph, in the form of a flat drawing, divides a set of points into regions (faces). Known algorithms can be used for obtaining cyclical graphs, describing each region separately, by means of nodes and edges. Such a description is possible even when the so called enclave is located within the parcel. Graphs illustrating this situation are presented in the paper. Enclaves may be represented as the so called islands. In such a case, a graph is composed of two subgraphs. Two independent graphs may be joined by the so called bridge, and two subgraphs – by an edge. In these two solutions concerning enclave representation it is possible to determine regions. The number of regions within a planar graph can be determined from the Euler's formula, which defines the correlation between the number of regions, and the number of edges and nodes in a graph.

Planar graphs describing regions may be transformed into dual graphs, where relationships between neighboring regions are presented in a simple way. In dual graphs nodes represent regions, and edges between nodes indicate that regions have a common edge. The degree of the node informs about the number of neighbors. If a parcel is described using a dual graph, a single matrix contains information on neighborhood relations within the whole complex of parcels. Traditionally, this infor-

mation is contained in GIS databases in the form of single records corresponding to particular parcels.
The theoretical bases of spatial data description applying graphs, presented in the paper, show that topological relationships within the whole complex of geographical objects can be recorded in a simple way. This in turn enables us to perform typical spatial analyses and to process topological data.

Elżbieta Lewandowicz
leela@uwm.edu.pl
http://www.ela.mapa.net.pl