

WYBRANE METODY OBLICZANIA PÓL POWIERZCHNI WIELOBOKÓW GEODEZYJNYCH NA ELIPSOIDZIE

SOME METHODS OF CALCULATION OF ELLIPSOIDAL POLYGONS AREAS

Jerzy Balcerzak, Paweł Pędzich

Instytut Fotogrametrii i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: kartografia matematyczna, odwzorowania kartograficzne, wieloboki geodezyjne, obliczanie pól powierzchni

Keywords: mathematical cartography, map projection, geodetic polygons, area calculation

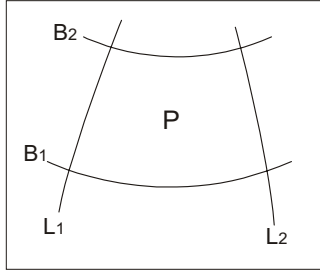
Wstęp

Umiejętność obliczania pól wieloboków geodezyjnych, czyli takich których bokami są odcinki linii geodezyjnych, ma istotne znaczenie w praktyce geodezyjnej i kartograficznej. Jednym z podstawowych zadań wykonywanych przez geodetów i kartografów jest obliczanie pól różnych obiektów powierzchniowych takich jak gmina, województwo, obszary użytków gruntowych itp. Jeżeli zadanie sprowadza się tylko do powierzchni kuli lub płaszczyzny to rozwiązanie jest stosunkowo łatwe. Zadanie komplikuje się jeżeli za powierzchnię odniesienia fizycznej powierzchni Ziemi przyjmujemy elipsoidę obrotową. Możemy wówczas korzystać ze znanych w geodezji wzorów na obliczenie pól powierzchni wieloboków geodezyjnych elipsoidalnych, ale mających zastosowanie jedynie do niewielkich obszarów. W artykule przedstawione są propozycje metod obliczania pól powierzchni, które mogą być stosowane dla dowolnych wieloboków geodezyjnych na elipsoidzie.

Wyznaczanie pól powierzchni wieloboków geodezyjnych na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej za pomocą trapezów elipsoidalnych

Pole trapezu elipsoidalnego ograniczonego równoleżnikami B_1 B_2 i południkami L_1 L_2 (rys.1) można w ogólności przedstawić za pomocą znanej całki

$$P = \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} MN \cos B dB dL \quad (1)$$



Rys. 1

gdzie

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}.$$

Po scałkowaniu (1) względem L otrzymujemy

$$P = (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} MN \cos B dB \quad (2)$$

a następnie po przekształceniu (2) mamy

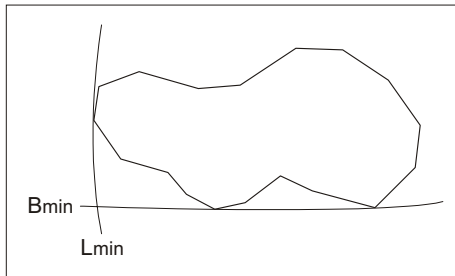
$$P = a^2 (1-e^2) (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} \quad (3)$$

Po rozwiązaniu całki (3) (König, Weise, 1951) otrzymujemy wzór

$$P = \frac{1}{2} a^2 (1-e^2) (L_2 - L_1) \left(\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right) \Big|_{B_1}^{B_2} \quad (4)$$

Zależność (4) może być wykorzystana do obliczania pól wieloboku geodezyjnego elipsoidy obrotowej, którego bokami są odcinki linii geodezyjnych, metodą całkowania realizowanego po jego obwodzie wykorzystując dokładne obliczanie pola trapezu południkowo-równoleżnikowego (Balcerzak, Gdowski, Panasiuk 1995).

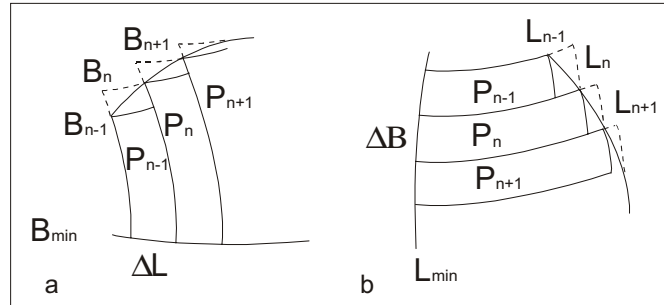
Ze względu na trudność analitycznego całkowania pola trapezu, którego jeden z boków jest odcinkiem linii geodezyjnej, wykorzystuje się jego rozbicie na zbiór elementarnych trapezów południkowo-równoleżnikowych (1) oraz przeprowadzenie stosownego całkowania numerycznego. Obliczanie pola wieloboku geodezyjnego sprowadza się wówczas do obliczania pól trapezów elipsoidalnych ograniczonych równoleżnikami i południkami oraz łukami linii geodezyjnych.



Rys. 2

Na podstawie rysunku 2 można zaproponować dwie metody obliczania pola P . Pierwsza metoda polega na rzutowaniu wierzchołków i boków wieloboku na wybrany równoleżnik, np. B_{\min} wzdłuż linii południka (rys. 3a). Otrzymany zbiór pól trapezów krzywoliniowych po zsumowaniu (z odpowiednimi znakami zależnie od kierunku całkowania) tak jak to ma miejsce przy obliczaniu powierzchni na płaszczyźnie xOy , daje nam poszukiwane pole wieloboku P .

Druga, alternatywna i kontrolna metoda polega na rzutowaniu boków wieloboku na wybrany południk, np. L_{\min} (rys. 3b). Ponieważ należy przewidywać, że odcinek linii geodezyjnej pomiędzy dwoma punktami wieloboku może zawierać punkt zwrotu tej linii to należy zbadać i ewentualnie wyznaczyć ten punkt i jeżeli ma to miejsce, rozbić



Rys. 3

dany bok na dwa odcinki tworzące w ten sposób dwa trapezy. Następnie obliczamy pole wieloboku metodą sumowania pól odpowiednich obszarów ograniczonych równoleżnikami i południkami oraz łukami linii geodezyjnych. Pola te obliczamy metodą całkowania numerycznego zależnego od przyjęcia stosownego przyrostu ΔL w pierwszej metodzie lub ΔB w drugiej metodzie.

Podstawowym zagadnieniem numerycznym jest więc badanie przebiegu linii geodezyjnej oraz konstruowanie odpowiedniego ciągu podziałów normalnych danego łuku linii geodezyjnej.

Niezbędna jest znajomość metod przenoszenia współrzędnych na elipsoidzie oraz metod określania współrzędnych geodezyjnych punktu zwrotu linii geodezyjnej.

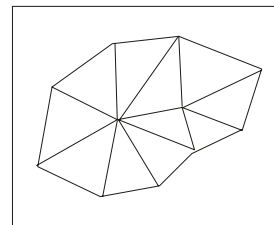
Wyznaczając pola wieloboków krzywoliniowych elipsoidalnych należy zauważyć, że składają się na nie oprócz pól trapezów południkowo równoleżnikowych także pola trójkątów ΔP_n leżących pomiędzy górną podstawą trapezu południkowo-równoleżnikowego a linią geodezyjną. Dla wyznaczenia pola takiego trójkąta należy więc obliczyć pole trapezu południkowo-równoleżnikowego $\Delta P_{n,n+1}$ ograniczonego równoleżnikami B_n i B_{n+1} a następnie pole ΔP_n trójkąta krzywoliniowego z wzoru

$$\Delta P_n = \frac{N_n \cos B_n}{N_n \cos B_n + N_{n+1} \cos B_{n+1}} \Delta P_{n,n+1} \quad (5)$$

Obliczanie pól powierzchni wieloboków geodezyjnych elipsoidalnych z wykorzystaniem trójkątów sferycznych

Podstawą wyznaczenia pola wieloboku geodezyjnego elipsoidalnego w tej metodzie jest jego podział na elementarne trójkąty geodezyjne (rys.4).

Przyjmuje się, że wierzchołki trójkątów geodezyjnych elipsoidalnych stanowią wierzchołki trójkątów sferycznych (rys. 5), czyli dla każdego wierzchołka $\varphi=B$, $\lambda=L$. Promień sfery dla każdego trójkąta wyznaczamy w następujący sposób

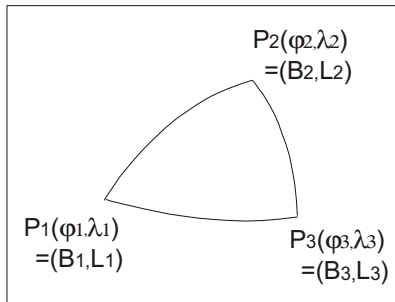


Rys. 4

$$R_i = \sqrt{M_i N_i} \quad (6)$$

$$R = \frac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3) \quad (7)$$

gdzie M, N – promienie krzywizn głównych w wierzchołkach trójkąta.



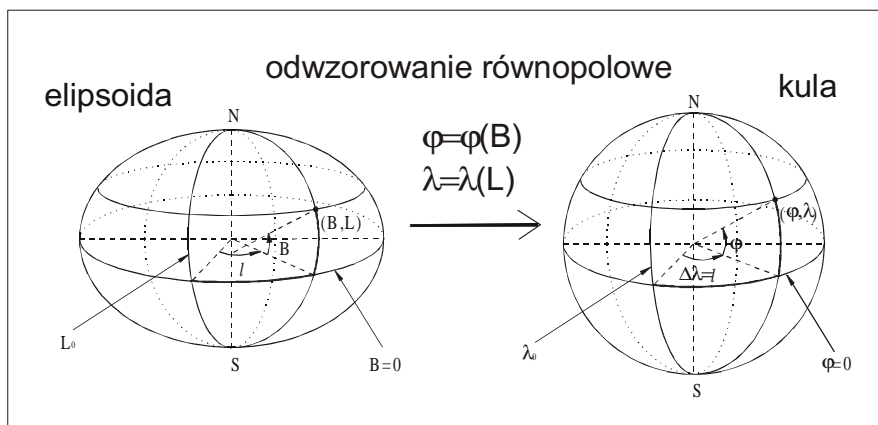
Trójkąty sferyczne rozwiązujemy stosując odpowiednie twierdzenia trygonometrii sferycznej. Następnie, mając wartość nadmiaru sferycznego, obliczamy pola tych trójkątów. Suma pól trójkątów sferycznych daje przybliżone pole wieloboku geodezyjnego.

Rys. 5

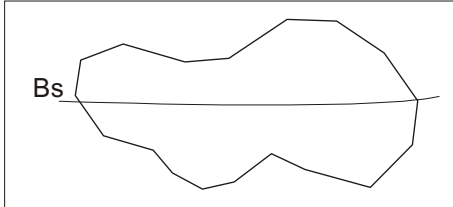
Obliczanie pól powierzchni wieloboków elipsoidalnych z wykorzystaniem odwzorowania równopolowego elipsoidy na kulę

Podstawą tego wariantu jest zastosowanie odwzorowania równopolowego elipsoidy na sferę (Abdulhadi 2003) (rys. 6)

$$\varphi(B) = \arcsin \left\{ \frac{a^2(1-e^2)}{2R^2} \left[\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right) \right] \right\}, \quad \lambda = L \quad (8)$$



Rys. 6



Promień sfery R dobieramy w taki sposób, aby równoleżnik B_s przechodzący przez środek wieloboku geodezyjnego odwzorował się izometrycznie (rys.7). Wartość tego promienia wyznaczamy z zależności

Rys. 7

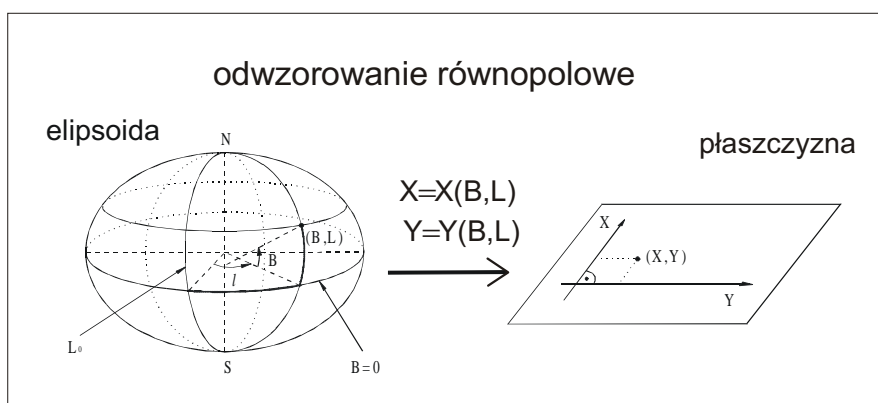
$$(R^2)^2 - (N^2 \cos^2 B_s) R^2 - \frac{1}{4} a^4 (1 - e^2)^2 \left[\frac{\sin B_s}{1 - e^2 \sin^2 B_s} + \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1 + e \sin B_s}{1 - e \sin B_s} \right) \right]^2 = 0 \quad (9)$$

Wielobok geodezyjny elipsoidalny zastępujemy wielobokiem geodezyjnym sferycznym, a następnie wyznaczamy kąty wierzchołkowe w tym wieloboku α_i $i=1,2,3,\dots,n$, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków. Pole wieloboku sferycznego liczymy na podstawie następującego wzoru

$$P = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - \pi(n-2) \right) R^2 \quad (10)$$

Obliczanie pól powierzchni wieloboków elipsoidalnych z wykorzystaniem odwzorowania równopolowego elipsoidy na płaszczyznę

Podstawą tej metody jest zastosowanie równopolowego odwzorowania elipsoidy na płaszczyznę (rys. 8)



Rys.8

Możemy tu zastosować proste równopolewe odwzorowanie stożkowe o postaci

$$\begin{aligned} Y &= \rho(B) \sin(c(L - L_0)) \\ X &= \rho(B) \cos(c(L - L_0)) \end{aligned} \quad (11)$$

Z warunku równopolewości $dP' = dP$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$-c\rho \frac{d\rho}{dB} = MN \cos B \quad (12)$$

po rozwiązaniu którego otrzymujemy

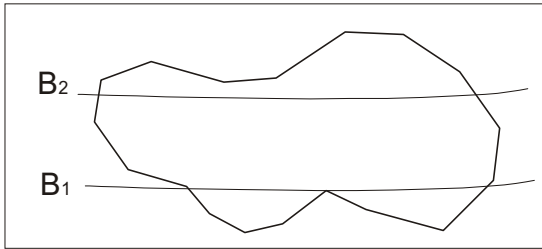
$$\rho = \sqrt{\frac{2C}{c} - \frac{2}{c} S(B)} \quad (13)$$

gdzie

$$S(B) = \int_0^B MN \cos t dt \quad (14)$$

Rozwiązanie całki (14) ma postać

$$S(B) = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left(\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \left| \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right| \right) \quad (15)$$



Rys. 9

Stałe C i c w (13) wyznaczamy z warunku, aby dwa równoleżniki o znanej szerokości geodezyjnej B_1 i B_2 przechodzące przez dany wielobok geodezyjny odwzorowały się izometrycznie (rys.9).

Warunek ten zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mu_L(B_1) &= \mu_L(B_2) = 1 \Rightarrow \\ \frac{c\rho(B_1)}{N(B_1)\cos B_1} &= \frac{c\rho(B_2)}{N(B_2)\cos B_2} = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Z powyższych równań otrzymujemy poszukiwane stałe

$$c = \frac{1}{2} \frac{N^2(B_2)\cos^2 B_2 - N^2(B_1)\cos^2 B_1}{S(B_1) - S(B_2)} \quad (17)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{N^2(B_2)\cos^2 B_2}{c} + S(B_2)$$

Ponieważ odwzorowanie jest równopolowe oraz redukcje odwzorowawcze pól na ograniczających bokach są małe możemy przyjąć, że pole wieloboku geodezyjnego elipsoidalnego jest równe polu jego obrazu i obliczyć je na podstawie ogólnego wzoru

$$P = \frac{1}{2}((x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)) \quad (18)$$

Jeżeli redukcje odwzorowawcze pól na bokach wieloboku nie są zanedbywalne, musimy dodatkowo obliczyć ich wartości stosując odpowiednią procedurę korekcyjną.

Redukcje pól wynikające z krzywoliniowego obrazu linii geodezyjnej w odwzorowaniu kartograficznym

W dowolnym odwzorowaniu kartograficznym elipsoidy obrotowej spłaszczonej o równaniu

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \left[\frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right] \quad (19)$$

$$(B, L) \in \omega = \left\{ (B, L) : B \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), L \in] -\pi, \pi [\right\}$$

w płaszczyznę obrazu o równaniu

$$\vec{r}' = \vec{r}'(B, L) = [x = x(B, L), y = y(B, L)] \quad (20)$$

Elementarne pole ΔP na elipsoidzie wiąże się z elementarnym polem $\Delta P'$ w odwzorowaniu kartograficznym zależnością

$$\Delta P = \frac{\Delta P'}{p} \quad (21)$$

gdzie

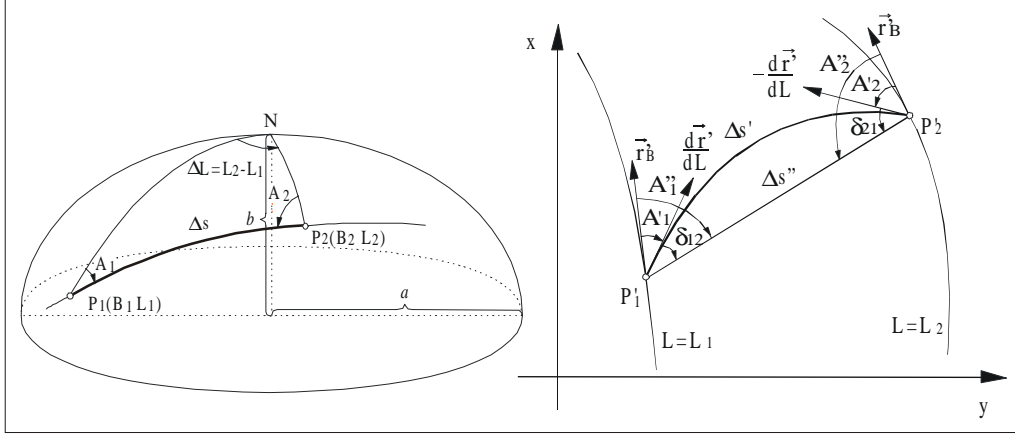
$$p = \frac{H'}{H} \text{ – elementarna skala zniekształceń pól,}$$

H' , H – wyróżniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni obrazu i oryginału.

Redukcja odwzorowawcza pola $\Delta'F$ (rys. 10) zawartego pomiędzy obrazem linii geodezyjnej w odwzorowaniu kartograficznym a cięciwą na płaszczyźnie odwzorowania wyraża się aproksymacyjnym wzorem

$$\Delta'F = \frac{\Delta s''}{4} \left(\frac{\delta - 0.5 \sin 2\delta}{\sin^2 \delta} \right) \quad (22)$$

gdzie $\Delta s''$ – długość cięciwy $P_1' P_2'$ oraz $d = 0,5(\delta_{12} + \delta_{21})$ jest średnią wartością kątów redukcyjnych na końcach odcinka.



Rys. 10

Wyznaczanie wartości δ_i kątów redukcyjnych wynika z następującego rozumowania. Mając dane współrzędne elipsoidalne wierzchołków wieloboku geodezyjnego obliczamy azymuty jego boków. Odpowiedniki topologiczne azymutów A_1, A_2 (rys. 10) obliczamy z definicji

$$A_1' = \sphericalangle \left(\vec{r}'_B, \frac{d\vec{r}'}{dL} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}}, \quad A_2' = \sphericalangle \left(\vec{r}'_B, -\frac{d\vec{r}'}{dL} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (23)$$

gdzie $\frac{d\vec{r}'}{dL} = \vec{r}'_B \frac{dB}{dL} + \vec{r}'_L$

tzn. z wzorów

$$\tan A_1' = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \frac{d\vec{r}'}{dL} \right| \operatorname{sgn} \Delta L}{\vec{r}'_B \cdot \frac{d\vec{r}'}{dL}} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}}, \quad \tan A_2' = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \frac{d\vec{r}'}{dL} \right| \operatorname{sgn} (-\Delta L)}{\vec{r}'_B \cdot \frac{d\vec{r}'}{dL}} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (24)$$

i analogicznie ich odpowiedniki redukcyjne w płaszczyźnie obrazu z wzorów

$$\tan A_1'' = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \Delta \vec{s}'' \right| \operatorname{sgn} \Delta L}{\vec{r}'_B \cdot \Delta \vec{s}''} \right)_{\substack{B=B_1 \\ L=L_1}}, \quad \tan A_1'' = \left(\frac{\left| \vec{r}'_B \times \Delta \vec{s}'' \right| \operatorname{sgn} (-\Delta L)}{\vec{r}'_B \cdot \Delta \vec{s}''} \right)_{\substack{B=B_2 \\ L=L_2}} \quad (25)$$

Przy czym $\Delta \vec{s}''$ – wektor cięciwy obrazu linii geodezyjnej $\Delta \vec{s}'$.

Pochodną $\frac{dB}{dL}$ obliczamy z wzoru (Balcerzak, Panasiuk, Pokrowska, 1995).

$$\frac{dB}{dL} = \frac{H \cot A - F}{E} = \frac{MN \cos B \cot A}{M^2} = \frac{N \cos B \cot A}{M} \quad (26)$$

Kąty redukcyjne δ_{12} oraz δ_{21} obliczamy jako różnicę odpowiedników redukcyjnych i obrazowych odpowiednich azymutów

$$\delta_{12} = A_1'' - A_1' \text{ oraz } \delta_{21} = A_2'' - A_2'. \quad (27)$$

Podsumowanie

W artykule przedstawiono teoretyczne podstawy obliczania pól wieloboków geodezyjnych na elipsoidzie. Zaproponowano cztery metody obliczania pól wieloboków elipsoidalnych. Pierwsza metoda polega na przybliżaniu pola wieloboku za pomocą południkowo-równoleżnikowych trapezów elipsoidalnych, w drugiej metodzie wielobok przybliża się elementarnymi trójkątami sferycznymi, trzecia bazuje na odwzorowaniu równopolewym elipsoidy na kulę, w czwartej natomiast wykorzystano odwzorowanie równopolewe elipsoidy w płaszczyznę. Pokazano także redukcje pól zawartych pomiędzy krzywoliniowym obrazem linii geodezyjnej a jego cięciwą w dowolnym odwzorowaniu kartograficznym. Przedstawione metody są alternatywnymi pozwalającymi na porównanie i kontrolę wartości pól obliczanych wieloboków. Obliczenia pól w płaszczyźnie odwzorowania, nawet jeśli uwzględniamy redukcje odwzorowawcze, powinny być zawsze kontrolowane innymi niezależnymi metodami. Oprócz wartości poznawczej problematyka tego typu pojawia się w przypadkach konieczności obliczania powierzchni kraju, województw, powiatów i gmin oraz wzajemnego wrównania powstających niezgodności. Prace tego typu okresowo są realizowane przez Główny Urząd Geodezji i Kartografii.

Literatura

- Abdulhadi, A., 2003: Podstawy teoretyczne konstruowania siatek kartograficznych powierzchni elipsoidy w położeniach ukośnych, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska.
Balcerzak J., Gdowski B., Panasiuk J., 1995: Obliczanie pól wieloboków geodezyjnych położonych na powierzchni elipsoidy obrotowej, *Geodezja i Kartografia* t. XLIV.
Balcerzak J., Panasiuk J., Pokrowska U., 1995: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
König R., Weise K., 1951: *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*, Berlin.

Summary

In the paper theoretical bases of area calculation of geodetic polygons on an ellipsoid are presented. Several methods are described. The first one is based on approximation of a polygon by elementary trapezoids delineated by parallels and meridians. The second method uses approximation of an ellipsoidal polygon by elementary spherical triangles. In the third method an equal-area projection of ellipsoid onto sphere is employed. The fourth method uses an equal-area projection of ellipsoid onto plane. In the fifth method reduction of area located between curved image of geodetic line and its chord is presented. The methods described provide competitive and more general solutions than those presented in literature which are applicable only to small ellipsoidal areas.

dr hab. inż. Jerzy Balcerzak
j.balcerzak@gik.pw.edu.pl
tel. (022) 660 55 90

dr inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl
tel. (022) 660 55 90