

BADANIE WŁASNOŚCI METRYCZNYCH ODWZOROWANIA GAUSSA-KRÜGERA ELIPSOIDY NA SFERĘ

ANALYSIS OF METRIC PROPERTIES OF GAUSS-KRÜGER PROJECTION OF AN ELLIPSOID ONTO A SPHERE

Jerzy Balcerzak, Paweł Pędzich

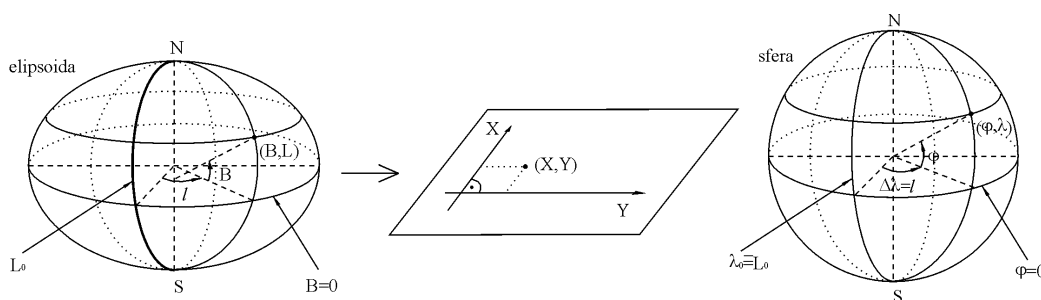
Zakład Kartografii, Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: odwzorowanie kartograficzne, zniekształcenia odwzorowawcze, odwzorowanie Gaussa-Krügera, odwzorowanie Mercatora

Keywords: map projection, distortion, Gauss-Krüger projection, Mercator projection

Odwzorowanie Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę jako odwzorowanie złożone

Odwzorowanie Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę jest odwzorowaniem konforemnym, w którym wybrany południk elipsoidy odwzorowuje się bez zniekształceń na południk sfery. Odwzorowanie takie może być zrealizowane jako odwzorowanie złożone z częściowych odwzorowań konforemnych, mianowicie odwzorowania Gaussa-Krügera całej elipsoidy na płaszczyznę, a następnie odwzorowania płaszczyzny na sferę za pomocą odwrotnego odwzorowania poprzecznego Mercatora (rys. 1).



Rys. 1. Odwzorowanie Gaussa-Krügera jako odwzorowanie złożone

Odwzorowanie Gaussa-Krügera elipsoidy na płaszczyznę z zastosowaniem całek eliptycznych Jacobiego

Uzyskanie obrazu całej elipsoidy na płaszczyźnie wymaga zastosowania specjalnych metod. W niniejszej pracy etap ten zrealizowany został w oparciu o aparat całek eliptycznych Jacobiego. Poniżej, na podstawie (Balcerzak, Panasiuk, 2003) przedstawiono zastosowaną metodę w zarysie.

Odwzorowanie Gaussa-Krügera jest odwzorowaniem konforemnym całej elipsoidy obrotowej spłaszczonej

$$\vec{r} = \vec{r}(B, L) = \left[\frac{a \cos B \cos l}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}}, \frac{a \cos B \sin l}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}}, \frac{a(1 - k^2) \sin B}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}} \right] \quad (1)$$

$$(B, L) \in \omega = \left\{ (B, L) : B \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, L \in \langle -\pi, \pi \rangle \right\}$$

$$l = L - L_0, L_0 = \text{const}, k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

w płaszczyznę

$$F = x_e + iy_e = \int_0^{\vartheta} M(t) dt = w(\vartheta) \quad (2)$$

$$z_e = q_e + il_e = \int_0^{\vartheta} \frac{M(t)}{N(t) \cos t} dt = \psi(\vartheta), \quad \vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2,$$

w ktorej

$$M = M(B) = \frac{a(1 - k^2)}{\left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}\right)^3}, \quad N = N(B) = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}}. \quad (3)$$

B – szerokość geodezyjna elipsoidalna,

q_e – szerokość geodezyjna izometryczna elipsoidalna określona związkiem

$$q_e = \ln \left[\left(\frac{1 - k \sin B}{1 + k \sin B} \right)^{\frac{k}{2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \right], \quad (4)$$

(q_e, l_e) – parametry izometryczne punktu (B, L) powierzchni elipsoidy.

Przejdźcie od współrzędnych (q_e, l_e) punktu (B, L) powierzchni elipsoidy, do współrzędnych x_e, y_e płaszczyzny odwzorowania, dokonuje się w oparciu o rozkład funkcji złożonej na część rzeczywistą

$$\text{Re } w(\psi^{-1}(z)) \quad (5)$$

i część urojoną

$$\text{Im } w(\psi^{-1}(z)). \quad (6)$$

Najpierw wyprowadzamy zależność

$$q_e = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}\right) - \frac{k}{2} \ln\left(\frac{1 + k \sin B}{1 - k \sin B}\right) =$$

$$= \tanh^{-1}[\operatorname{sn}(u, k)] - k \tanh^{-1}[k \operatorname{sn}(u, k)] \quad (7)$$

pamiętając iż

$$\tanh^{-1}(\sin(B)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}\right), \quad (8)$$

gdzie: $\operatorname{sn}(u, k)$ – oznacza (Byrd, Friedman, 1954) pewną funkcję argumentu u i parametru k zwaną sinusem eliptycznym Jacobiego.

Korzystamy tu z podstawienia

$$\sin B = \operatorname{sn}(u, k). \quad (9)$$

Następnie przechodzimy od argumentu rzeczywistego u do argumentu zespolonego $z = u + iv$. Doprowadza to do rozdzielenia funkcji

$$q_e + il_e = \tanh^{-1}[\operatorname{sn}(u + iv)] - k \tanh^{-1}[k \operatorname{sn}(u + iv)] \quad (10)$$

na część rzeczywistą

$$q_e = \tanh^{-1}[\operatorname{sn} \operatorname{dn}' v] - k \tanh^{-1}[\operatorname{sn} u \operatorname{dn}'(K - u) \operatorname{tn}' v] \quad (11)$$

i część urojoną

$$l_e = \tan^{-1}\left[\frac{\operatorname{tn}' v}{\operatorname{sn}(K - u)}\right] - k \tan^{-1}[k \operatorname{sn}(K - u) \operatorname{tn}' v]. \quad (12)$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$\operatorname{dn}' v$ – pewna funkcja zwana „delta amplitudy Jacobiego” wzięta od modułu uzupełniającego

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad (13)$$

$\operatorname{tn}' v = \frac{\operatorname{sn}' v}{\operatorname{cn}' v}$ tangens eliptyczny Jacobiego, zależny od argumentu v i modułu uzupełniającego k' ,

$\operatorname{sn}' v, \operatorname{cn}' v$ – sinus i cosinus eliptyczny Jacobiego, zależny od argumentu v i modułu uzupełniającego k' ,

K – ćwierćokres funkcji eliptycznych Jacobiego, zależny od modułu k powierzchni elipsoidy, K' – ćwierćokres funkcji eliptycznych Jacobiego, zależny od modułu uzupełniającego k' .

Podobnie postępujemy przy rozkładzie na część rzeczywistą i część urojoną funkcji $F = w(\mathcal{G})$.

Bierzemy pod uwagę element łuku południka

$$ds_e = MdB = \frac{a(1 - k^2)}{\left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}\right)^3} dB \quad (14)$$

powierzchni elipsoidy i doprowadzamy go do postaci

$$ds_e = \frac{ak' du}{dn^2 u} = a dn^2(K+u) du. \quad (15)$$

Przy tym także wprowadzamy oznaczenia

$$\cos B = cn u, \quad \operatorname{sn}(K' - u) = \frac{cn u}{dn u}, \quad dB = (dn u) du. \quad (16)$$

Obustronne całkowanie doprowadza nas do wyrażenia

$$s_e = a \int_0^u dn^2(K+u) d(K+u) = aE(K+u) - aE, \quad (17)$$

w którym $E(K+u)$ i $E(k)$ oznaczają (Byrd, Friedman, 1954) tzw. zupełne całki eliptyczne Jacobiego drugiego rodzaju, wzięte od odpowiednich swoich argumentów $K+u$ i K .

Wzbogacając argument u o część urojoną, tzn. przyjmując zamiast u zmienną zespoloną $(u+iv)$ znajdujemy

$$F = x_e + iy_e = a [E(K+u+iv) - E(K)]. \quad (18)$$

Rozdzielenie funkcji (18) na część rzeczywistą x_e i część urojoną y_e pozwala na

$$\frac{x_e}{a} = E(u) - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{dn^2 u + (dn' v)^2 - 1}, \quad (19)$$

$$\frac{y_e}{a} = v - E'(v) + \frac{(k')^2 \operatorname{sn}' v \operatorname{cn}' v \operatorname{dn}' v}{dn^2 u + (dn' v)^2 - 1},$$

w którym $E'(v)$ oznacza funkcję $E(v)$ wziętą od modułu uzupełniającego k' .

Zmienne x_e i y_e oznaczają już w układzie ortokartezjańskim płaskim współrzędne w odwzorowaniu Gaussa-Krügera.

Odzworowanie Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę

Podstawą wyznaczenia odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę jest pewna funkcja

$$q_e = f(q_k) \quad (20)$$

wiążąca szerokość geodezyjną izometryczną elipsoidalną q_e z szerokością izometryczną sferyczną q_k powierzchni kuli. Funkcja ta na południku osiowym $l_e = 0$ powierzchni elipsoidy generowana jest przez równość

$$s_e(B) = s_k(\varphi) \quad (21)$$

W równości tej:

$s_e(B)$ – oznacza długość łuku południka powierzchni elipsoidy liczoną od równika $B=0$,
 $s_k(\varphi)$ – długość łuku południka osiowego sfery o promieniu R liczoną od równika $\varphi=0$.

Wartość promienia R determinuje równość

$$R \frac{\pi}{2} = s_e \left(\frac{\pi}{2} \right). \quad (22)$$

Lecz φ zależy od szerokości izometrycznej sferycznej q_k , a parametr B zależy od szerokości geodezyjnej izometrycznej elipsoidalnej q_e . Zatem na południku osiowym musi zachodzić układ zależności

$$w(\psi^{-1}(q_k)) = s_k, w(\psi^{-1}(q_e)) = s_e \quad (23)$$

spełniających równość

$$w(\psi^{-1}(q_k)) = w(\psi^{-1}(q_e)). \quad (24)$$

Po zastąpieniu w niej szerokości izometrycznej q_e parametrem zespolonym $z_e = q_e + il_e$ prawa strona prowadzi do odwzorowania Gaussa-Krügera. Natomiast lewa strona (24), po zastąpieniu w niej parametru q_k parametrem zespolonym $z_k = q_k + il_k$ też opisuje pewne odwzorowanie konforemne. W istocie rzeczy może być utożsamiane z odwzorowaniem poprzecznym Mercatora. W odwzorowaniu tym, półoś równikowa a zastąpiona jest parametrem R , przy jednoczesnym wyzerowaniu wartości mimośrodu k . Odwrócenie więc pierwszej z funkcji, przy założeniu że $s_k = s_e$ prowadzi do znalezienia argumentu q_k z zadanej wartości s_e .

Po wzbogaceniu parametru q_k o część urojoną il_k , z odwrócenia (24), znajdujemy

$$z_k = q_k + il_k = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2R} \right). \quad (25)$$

Zmienna F oznacza punkt (x_e, y_e) , czyli punkt w płaszczyźnie zmiennej zespolonej $z_e = x_e + iy_e$.

Wyznaczenie współrzędnych q_k, l_k występujących w (25) sprowadza się do rozdzielenia funkcji na część rzeczywistą i część urojoną.

W tym celu wyprowadzamy zależność:

$$\left[e^{z_k} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{2R} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{F}{R}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{F}{R}}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{F}{R} \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{F}{R} \right)}} = \right. \quad (26)$$

$$\left. = \sqrt{\frac{1 + \sin \left(\frac{F}{R} \right)}{1 - \sin \left(\frac{F}{R} \right)}} \right] \Leftrightarrow \left[(e^{z_k})^2 = \frac{1 + \sin \left(\frac{F}{R} \right)}{1 - \sin \left(\frac{F}{R} \right)} \right],$$

a następnie

$$\left[(e^{z_k})^2 - (e^{z_k})^2 \sin \left(\frac{F}{R} \right) = 1 + \sin \left(\frac{F}{R} \right) \right] \equiv \left[\sin \left(\frac{F}{R} \right) = \frac{e^{2z_k} - 1}{e^{2z_k} + 1} = \tanh z_k \right]. \quad (27)$$

W dalszym ciągu (König, 1951) korzystamy z tożsamości

$$\arcsin w = \frac{1}{i} \ln \left(iw + \sqrt{1 + w^2} \right). \quad (28)$$

Przyjmując $w = \tanh z_k$ znajdujemy

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{F}{R} = \frac{1}{i} \ln \left[i \tanh z_k + \sqrt{1 - (\tanh z_k)^2} \right] = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{i \sinh z_k + 1}{\cosh z_k} \right] = \right. \\
 = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{i \sin(iz_k) + 1}{\cos(iz_k)} \right] = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{1 + \sin(iz_k)}{\sqrt{1 - \sin^2(iz_k)}} \right] = \\
 = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1 + \sin(iz_k)}{1 - \sin(iz_k)}} = \frac{1}{i} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{iz_k}{2} \right) \Big\} \equiv \\
 \equiv \left\{ \frac{F}{R} = \frac{1}{i} \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{iz_k}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Związek ten może przyjmować różne formy. Jeżeli na przykład przyjmiemy, że

$$\xi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{iz_k}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \sin(iz_k)}{1 - \sin(iz_k)}} = e^{i \frac{F}{R}} \tag{30}$$

to otrzymamy

$$\tanh \left(\frac{i \frac{F}{R}}{2} \right) = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{e^{iz_k} - 1}{e^{iz_k} + 1} = i \tanh \left(\frac{z_k}{2} \right) = \tan \left(\frac{iz_k}{2} \right) \tag{31}$$

Oznacza to tyle, że zachodzi związek

$$\tanh \left(\frac{z_k}{2} \right) = \tan \left(\frac{F}{2R} \right). \tag{32}$$

Ale zachodzi też związek

$$\sinh z_k = \tan \left(\frac{F}{R} \right), \tag{33}$$

bowiem

$$\sin(iz_k) = i \sinh z_k = \frac{2 \tan \left(\frac{iz_k}{2} \right)}{1 + \tanh^2 \left(\frac{iz_k}{2} \right)} = \tanh \left(i \frac{F}{R} \right) = i \tan \left(\frac{F}{R} \right), \tag{34}$$

a także związek

$$\frac{1}{\cosh z_k} = \cos \left(\frac{F}{R} \right), \tag{35}$$

bowiem

$$\frac{1}{\cos(iz_k)} = \frac{1}{\cosh z_k} = \frac{1 + \tan^2 \left(\frac{iz_k}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{iz_k}{2} \right)} = \frac{1 + \tanh^2 \left(\frac{i \frac{F}{R}}{2} \right)}{1 - \tanh^2 \left(\frac{i \frac{F}{R}}{2} \right)} = \cosh \left(i \frac{F}{R} \right) = \cos \left(\frac{F}{R} \right). \tag{36}$$

Związek

$$\tanh z_k = \sin\left(\frac{F}{R}\right), \quad (37)$$

wynika z faktu, iż

$$\tan(iz_k) = i \tanh z_k = i \sin\left(\frac{F}{R}\right) = \sinh\left(i\frac{F}{R}\right). \quad (38)$$

Wyznaczenie argumentu $z_k = q_k + il_k$, wyrażonego przez zmienne $x_k = x_e$, $y_k = y_e$, wymaga (König, Weise, 1951) rozpatrzenia tożsamości

$$\ln \tan \hat{z} = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos 2\hat{x}}{\cosh 2\hat{y}}\right) + i \operatorname{arctan}\left(\frac{\sinh 2\hat{y}}{\sin 2\hat{x}}\right), \quad (39)$$

wziętej dla

$$\left(\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} = \frac{\pi}{4} + \frac{F}{2R} = \frac{\pi}{4} + \frac{x_e}{2R} + i\frac{y_e}{2R}\right) \Rightarrow \left(2\hat{x} = \frac{\pi}{2} + \frac{x_e}{R}, 2\hat{y} = \frac{y_e}{R}\right). \quad (40)$$

Następnie znajdujemy

$$\begin{aligned} \hat{z} = q_k + il_k &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sin\left(\frac{x_e}{R}\right)}{\cosh\left(\frac{y_e}{R}\right)}\right) + i \operatorname{arctan}\left(\frac{\sinh\left(\frac{y_e}{R}\right)}{\cos\left(\frac{x_e}{R}\right)}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\tanh q_k = \frac{\sin\left(\frac{x_e}{R}\right)}{\cosh\left(\frac{y_e}{R}\right)}, \quad \tan l_k = \frac{\sinh\left(\frac{y_e}{R}\right)}{\cos\left(\frac{x_e}{R}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Jeżeli natomiast przyjmiemy, że

$$\left[\hat{z} = \frac{\pi}{4} + i\frac{z_k}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{l_k}{2}\right) + i\frac{q_k}{2}\right] \Rightarrow \left[2\hat{x} = \frac{\pi}{2} - l_k, 2\hat{y} = q_k\right], \quad (42)$$

to

$$\frac{F}{R} = \frac{x_e}{R} + i\frac{y_e}{R} = \operatorname{arctan}\left(\frac{\sinh q_k}{\cos l_k}\right) + i \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sin l_k}{\cosh q_k}\right). \quad (43)$$

Zatem zachodzi zależność

$$\tan\left(\frac{x_e}{R}\right) = \frac{\sinh q_k}{\cos l_k} = \frac{\tan \varphi}{\cos l_k}, \quad \tanh\left(\frac{y_e}{R}\right) = \frac{\sin l_k}{\cosh q_k} = \sin l_k \cos \varphi. \quad (44)$$

Na południku osiowym mamy więc

$$\tanh\left(\frac{q_k}{2}\right) = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \tanh q_k = \sin \varphi, \quad (45)$$

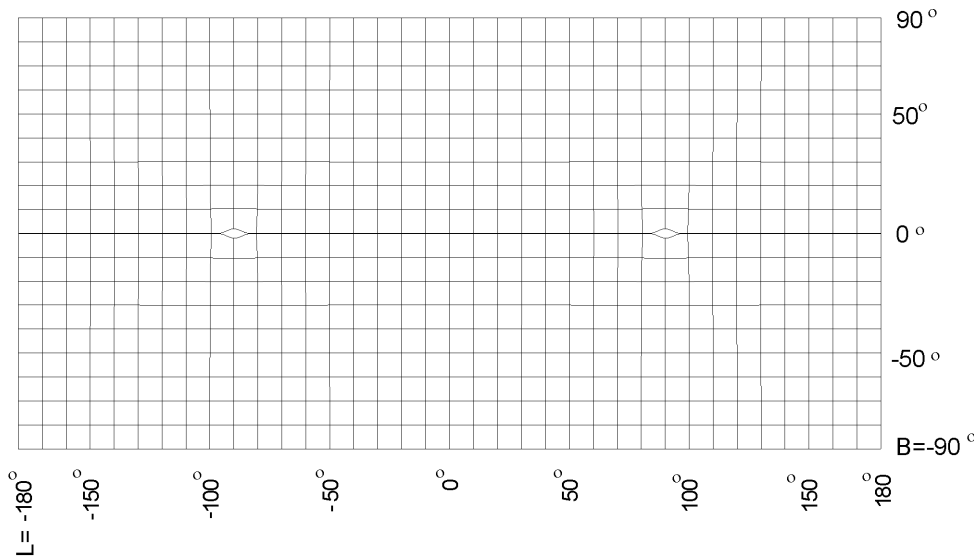
a także

$$\sinh q_k = \tan \varphi, \quad \frac{1}{\cosh q_k} = \cos \varphi. \quad (46)$$

Powyższe zależności (45) i (46) determinują odwzorowanie poprzeczne Mercatora.

Siatka kartograficzna w odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę

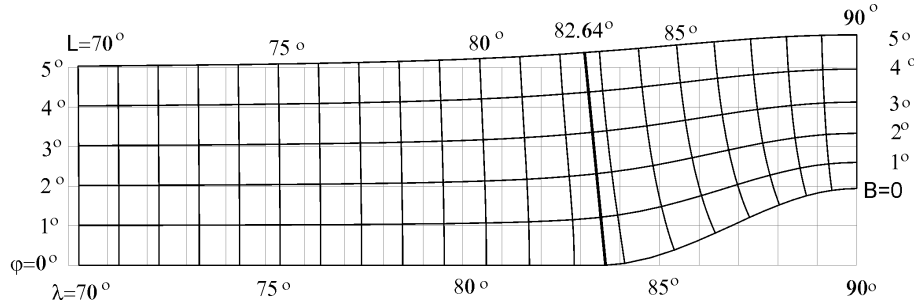
W oparciu o przedstawione wzory odwzorowania Gaussa-Krügera obliczono współrzędne φ, λ punktów tworzących siatkę obrazów linii $B=\text{const}, L=\text{const}$ na sferze. W celu przedstawienia uzyskanych wyników na płaszczyźnie przyjęto następujący sposób odwzorowania sfery $x=\varphi, y=\lambda$. Na rysunku 2 przedstawiono obraz siatki linii parametrycznych $B=\text{const}, L=\text{const}$ całej elipsoidy na sferze. W tej skali opracowania przebieg obrazów linii $B=\text{const}, L=\text{const}$ wydają się, że prawie całkowicie pokrywa się z przebiegiem linii siatki $\varphi=\text{const}, \lambda=\text{const}$. Odstępstwa są wyraźnie widoczne w okolicach punktów o współrzędnych $B=0^\circ, L=\pm 90^\circ$. W otoczeniu tych punktów występują pewne osobliwości odwzorowania.



Rys. 2. Obraz siatki linii parametrycznych $B=\text{const}, L=\text{const}$ całej elipsoidy na sferze w odwzorowaniu Gaussa-Krügera

W celu przeprowadzenia szczegółowej analizy przebiegu linii parametrycznych $B=\text{const}, L=\text{const}$ w pobliżu punktów osobliwych odwzorowania, opracowano siatkę kartograficzną obejmującą obszar ograniczony południkami od $L=70^\circ$ do $L=90^\circ$ oraz równoleżnikami od $B=0^\circ$ do $B=5^\circ$. Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przebieg tej siatki na płaszczyźnie, przyjmując do prezentacji następujący sposób odwzorowania sfery na płaszczyznę $x=\varphi, y=\lambda$.

Z rysunku 3 widać, że południki i równoleżniki układu współrzędnych elipsoidalnych $B=\text{const}, L=\text{const}$ odwzorowują się na pewne krzywe na sferze nie pokrywające się z równoleżnikami i południkami $\varphi=\text{const}, \lambda=\text{const}$ sfery. Równika elipsoidalny $B=0^\circ$ odwzorowuje się w sposób nieregularny. W punkcie o długości geodezyjnej $L=90^\circ(1-k)=82,64^\circ$ rozdziela się na dwie części stanowiąc osobliwość odwzorowania. Elipsoida nie odwzorowuje się zatem na całą sferę. W otoczeniu punktów o współrzędnych $B=0^\circ, L=\pm 90^\circ \pm 7,36^\circ$ występują osobliwości.



Rys. 3. Obraz siatki linii parametrycznych $B=\text{const}$, $L=\text{const}$ na tle siatki $\varphi=\text{const}$, $\lambda=\text{const}$ obejmujący fragment elipsoidy ograniczonej południkami $L=70^\circ$ i $L=90^\circ$ oraz równoleżnikami $B=0^\circ$ oraz $B=5^\circ$

Rozkład zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę

W odwzorowaniu kartograficznym konforemnym powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi, l_k) = [R \cos \varphi \cos l_k, R \cos \varphi \sin l_k, R \sin \varphi], \tag{47}$$

$$l_k = \lambda - \lambda_0 \quad \lambda_0 = \text{const},$$

$$(\varphi, \lambda) \in \omega_k = \left\{ (\varphi, \lambda) : \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle \right\},$$

o promieniu R spełniającym warunek, w którym

$$q_e = \int_0^B \frac{M(t)}{N(t) \cos t} dt = \psi_e(B) \tag{48}$$

oznacza szerokość geodezyjną izometryczną elipsoidalną powierzchni elipsoidy, zaś

$$q_k = \int_0^\varphi \frac{dt}{\cos t} = \psi(\varphi), \tag{49}$$

izometryczną szerokość sferyczną.

Zatem formuła opisująca lokalną skalę długości

$$\vec{\mu} = \frac{d\vec{r}}{|dF|} \tag{50}$$

w płaszczyźnie zmiennej zespolonej z_e daje się wyrazić za pomocą związku

$$\mu = |\vec{\mu}| = \frac{R \cos \varphi}{N \cos B} \left| \frac{dz_k}{dz_e} \right| = \frac{R \cos \varphi}{N \cos B} \left| \frac{dz_k}{dF} \frac{dF}{dz_e} \right|. \tag{51}$$

Prawa strona daje się przedstawić w postaci ilorazu

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{R \cos \varphi} \left| \frac{dF}{dz_k} \right|} \frac{1}{N \cos B} \left| \frac{dF}{dz_e} \right| = \frac{\mu_{GK}}{\mu_{PM}}, \quad (52)$$

w którym

$$\mu_{GK} = \frac{1}{N \cos B} \left| \frac{dF}{dz_e} \right| \quad (53)$$

oznacza lokalną skalę długości w odwzorowaniu Gaussa-Krügera, zaś

$$\mu_{PM} = \frac{1}{\cos \varphi} \left| \frac{dF}{dz_k} \right|, \quad (54)$$

lokalną skalę długości w odwzorowaniu poprzecznym Mercatora.

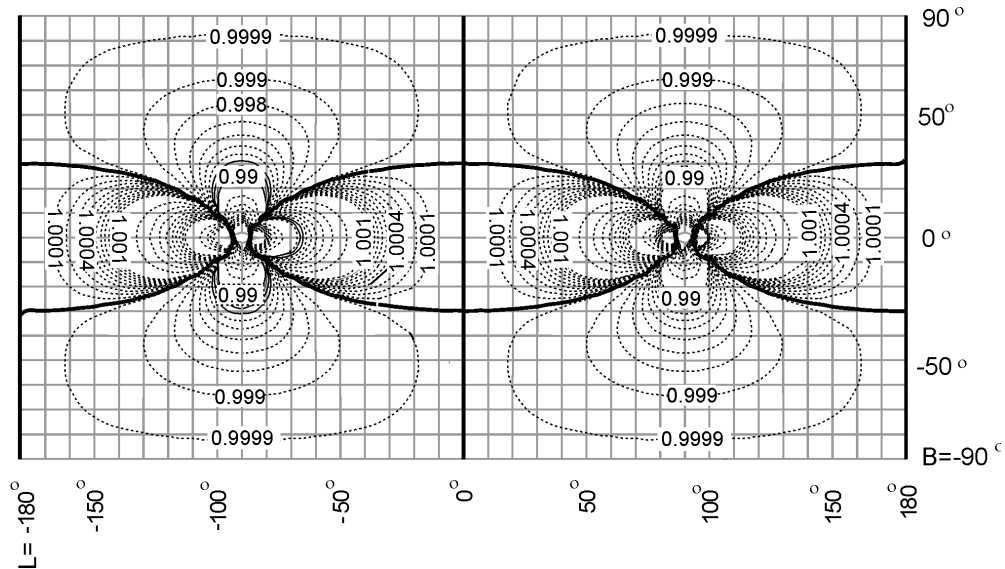
Występująca tu zmienna F , określa wspólną dla powierzchni elipsoidy i powierzchni sfery zespoloną długość łuku południka $s_e = s_k$.

Pochodną $\frac{dF}{dz_e}$ obliczamy według relacji

$$\frac{dF}{dz_e} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dz_e} = M(\hat{B}) \frac{N(\hat{B}) \cos \hat{B}}{M(\hat{B})} = N(\hat{B}) \cos(\hat{B}) \text{ dla } \hat{B} = B_1 + iB_2. \quad (55)$$

Natomiast pochodną $\frac{dF}{dz_k}$ przez analogię do powyższego.

Stosując powyższe wzory wyznaczono stan rozkładu zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę. Na rysunku 4 przedstawiono izoskale długości w tym odwzorowaniu.



Rys. 4. Rozkład zniekształceń odwzorowawczych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę

Z analizy uzyskanych wyników dotyczących rozkładu zniekształceń wynika, że izometrycznie odwzorowują się następujące linie: południk osiowy $L=L_0$, południk $L=L_0+180^\circ$ oraz dwie krzywe o sinusoidalnym kształcie, symetryczne względem równika. Krzywe te przecinają równik w punktach o długościach geograficznych $L=L_0\pm 90^\circ\pm 7,36^\circ$. W wyniku przecięcia linii odwzorowujących się izometrycznie otrzymujemy cztery punkty, których otoczenia tworzą podobszary charakteryzujące się niewielkimi zniekształceniami odwzorowawczymi.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono nowe podejście do odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy na sferę. Odwzorowanie to definiuje się jako konforemne odwzorowanie elipsoidy na sferę z wybranym południkiem elipsoidalnym odwzorowującym się izometrycznie na południk sfery. Opisane odwzorowanie realizowane jest w dwóch zasadniczych etapach. Pierwszy etap to odwzorowanie Gaussa-Krügera elipsoidy na płaszczyznę, drugi etap polega na zastosowaniu poprzecznego odwzorowania Mercatora sfery w płaszczyznę w aspekcie odwrotnym. Do wyprowadzenia funkcji odwzorowawczych wykorzystano aparat całek eliptycznych Jacobiego. Takie podejście pozwala na odwzorowanie całej elipsoidy na sferę oraz dokładne określenie własności i osobliwości tego odwzorowania.

Przedstawione odwzorowanie może znaleźć zastosowanie, stanowiąc jeden z etapów pośrednich, m.in. jako podstawa tworzenia nowych odwzorowań kartograficznych elipsoidy w płaszczyznę, złożonych z kilku odwzorowań cząstkowych.

Literatura

- Balcerzak J., Panasiuk J., 2003: Analytical description of Gauss-Krüger projection in spheroidal and spheroidal-and-spheroidal versions, *Geodezja i Kartografia*, t. LII, z. 4, Warszawa.
- Byrd P.F., Friedman M.D., 1954: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicist, Springer-Verlag, Berlin.
- König R., Weise K., 1951: Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und kartographie, Berlin.

Abstract

The paper presents the method of the Gauss-Krüger projection of an ellipsoid onto a sphere, i.e. such conformal projection of an ellipsoid onto a sphere, for which the selected central meridian is projected without linear deformations. This is a complex projection, which consists of several partial projections. The most important stage is the conceptual Gauss-Krüger projection of an auxiliary surface, and then the use of the transverse Mercator projection of the corresponding area of a plane onto a sphere of the appropriately selected radius. The developed method allows for conformal projection of the entire ellipsoid, with maintenance of equi-distance of the central meridian. Performed numerical analyses proved that meridians $L = \text{const}$ and parallels $B = \text{const}$ of the ellipsoid do not overlap with meridians $l = \text{const}$ and parallels $j = \text{const}$ of the sphere. Values of deviations depend on the value of the ellipsoid flattening. For the Earth ellipsoid those values are not big, but it should be realised that they occur. Bigger deviations occur around peculiar points of the Gauss-Krüger projection. For those places the curvature of meridians, as well as parallels, is clearly visible. Although the proposed method has theoretical value, it may also be practically applied in some cases.

prof. dr hab. inż. Jerzy Balcerzak
j.balcerzak@gik.pw.edu.pl

dr hab. inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl