

**BADANIE ZNIEKSZTAŁCEŃ ORAZ ICH WPŁYWU
NA WARTOŚĆ WYZNACZANYCH PÓL WIELOBOKÓW
W WYBRANYCH ODWZOROWANIACH
RÓWNOPOLOWYCH**

**ANALYSIS OF DISTORTIONS IN SELECTED EQUAL-AREA
PROJECTIONS AND THEIR INFLUENCE
ON CALCULATED AREA VALUES OF POLYGONS**

Paweł Pędzich, Marta Kuźma

Zakład Kartografii, Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska

Słowa kluczowe: odwzorowania kartograficzne równopolowe, zniekształcenia odwzorowawcze, wieloboki geodezyjne

Keywords: equal-area cartographic projections, projection distortions, geodetic polygons

Ogólne własności odwzorowań równopolowych

Odwzorowania równopolowe posiadają wiele ciekawych własności metrycznych. Podstawową ich własnością jest zachowanie pól powierzchni, tzn. wartości pól powierzchni figur oryginału są równe wartościom pól powierzchni odpowiedników topologicznych (obrazowych) tych figur w płaszczyźnie odwzorowania. W odwzorowaniach równopolowych nie będących odwzorowaniami geodezyjnymi¹, obrazem figury geodezyjnej w płaszczyźnie odwzorowania jest pewna figura krzywoliniowa. Należy zdawać sobie sprawę, że mimo własności równopolowości takich odwzorowań, pole powierzchni wieloboku utworzonego przez odpowiedniki redukcyjne, tj. odcinki linii prostych na płaszczyźnie obrazu, nie jest równe polu powierzchni odpowiadającego mu wieloboku geodezyjnego na powierzchni oryginału.

Inną własnością odwzorowań równopolowych jest to, że w każdym punkcie płaszczyzny obrazu ekstremalne skale zniekształceń długości są wzajemnymi odwrotnościami:

$$m = \frac{1}{n} \quad (1)$$

gdzie: m, n – ekstremalne skale zniekształceń długości w kierunkach głównych.

¹ Odwzorowania geodezyjne to takie odwzorowania kartograficzne, w których linie geodezyjne powierzchni oryginału odwzorowują się na linie geodezyjne w płaszczyźnie obrazu.

Badając rozkład zniekształceń długości ograniczymy się więc do określania jednej ze skal ekstremalnych.

Maksymalne zniekształcenia kątowe określamy z wzoru:

$$\omega_{\max} = 2 \arctan\left(\frac{1}{2}(m-n)\right) \quad (2)$$

Analiza rozkładu zniekształceń odwzorowawczych w wybranych odwzorowaniach równopolowych

W rozdziale tym zaprezentowane zostaną wyniki analiz zniekształceń odwzorowawczych w wybranych odwzorowaniach równopolowych. Przedstawione zostaną zarówno typowe odwzorowania kartograficzne stosowane powszechnie w systemach informacji geograficznej, jak i odwzorowania kartograficzne opracowane w oparciu o kryteria minimalizacji zniekształceń odwzorowawczych. Stosowne odwzorowania wyznaczono dla obszaru Polski oraz województwa mazowieckiego.

Odwzorowanie walcowe elipsoidy w płaszczyznę

W odwzorowaniu walcowym elipsoidy funkcje odwzorowawcze (Snyder, 1987) mają następującą postać:

$$\vec{r}' = \left[x = \frac{1}{k} R^2 \sin \beta(B), y = kL \right]$$

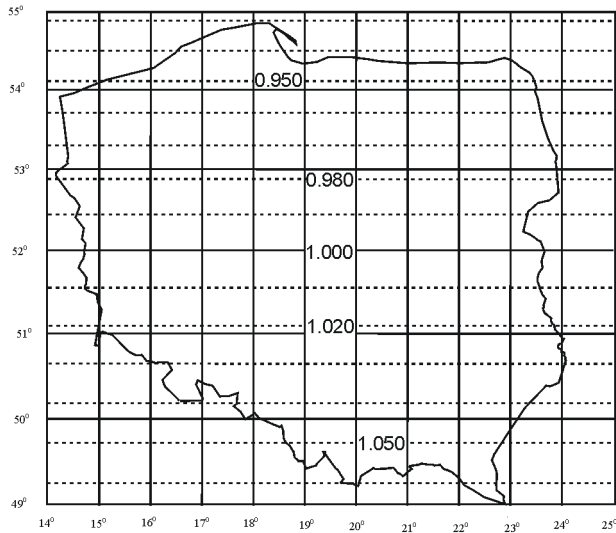
$$k = N_k \cos B_k$$

$$R^2 \sin \beta(B) = \left[\frac{a^2(1-e^2)}{2} \left(\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right) \right] \quad (3)$$

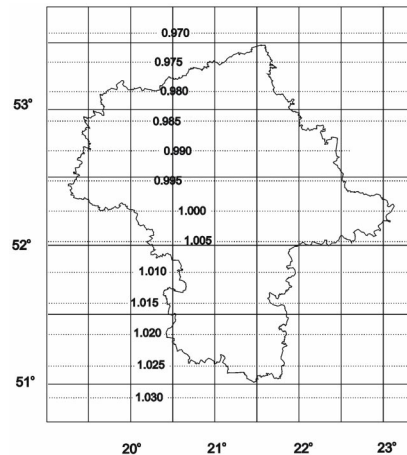
$$R^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right)$$

$$m = \frac{N \cos B}{k}$$

Zniekształcenia odwzorowawcze długości w takim odwzorowaniu są stosunkowo duże. Dla obszaru Polski maksymalne zniekształcenia długości wnoszą ok. 70 m/km na południu i północy kraju. Maksymalne zniekształcenia kątowe wynoszą ok. 8°. Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 30 m/km, a zniekształcenia kątów 3,5°.



Rys. 1. Izoskale długości w odwzorowaniu walcowym równopółowym Polski



Rys. 2. Izoskale długości w odwzorowaniu walcowym równopółowym województwa mazowieckiego

Odwzorowanie azymutalne normalne elipsoidy w płaszczyznę

W odwzorowaniu azymutalnym funkcje odwzorowawcze mają postać:

$$\vec{r}' = [x = \rho \cos L, y = \rho \sin L]$$

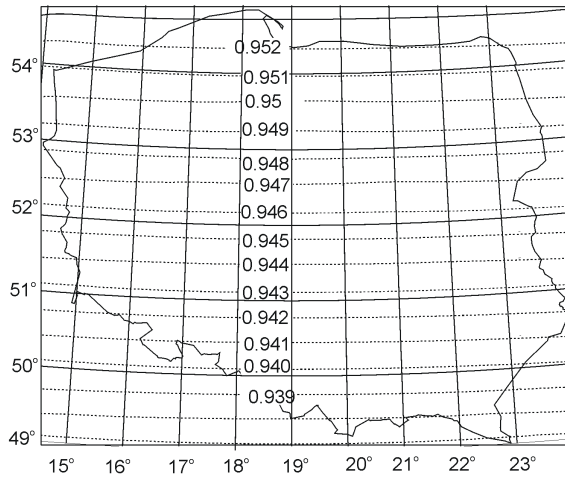
$$\rho = 2R \sin\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$R^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (4)$$

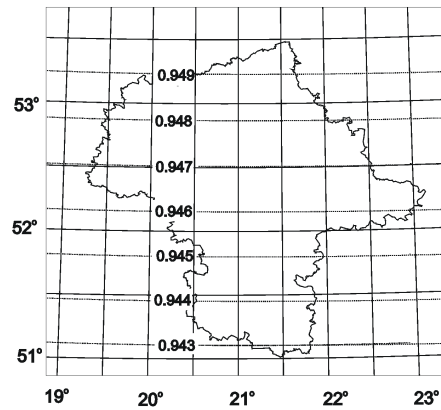
$$\sin \beta(B) = \left[\frac{a^2(1-e)^2}{2R^2} \left(\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right) \right]$$

$$m = \mu_\varphi = \frac{N \cos B}{2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}$$

Zniekształcenia odwzorowawcze długości w tym odwzorowaniu są nieco mniejsze niż w odwzorowaniu walcowym. Dla obszaru Polski maksymalne zniekształcenia długości wynoszą ok. 67 m/km na południu i północy kraju. Maksymalne zniekształcenia kątowe wynoszą ok. 7,4°. Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 57 m/km, a zniekształcenia kątów 6,8°.



Rys. 3. Izoskale długości w odwzorowaniu azymutalnym równopolewym Polski



Rys. 4. Izoskale długości w odwzorowaniu azymutalnym równopolewym województwa mazowieckiego

Odwzorowanie sinusoidalne Sansona elipsoidy w płaszczyznę

W odwzorowaniu Sansona funkcje odwzorowawcze mają następującą postać:

$$\vec{r}' = [x = S(B), y = NL \cos B] \quad (5)$$

gdzie: S – długość łuku południka, N – promień przekroju poprzecznego elipsoidy,

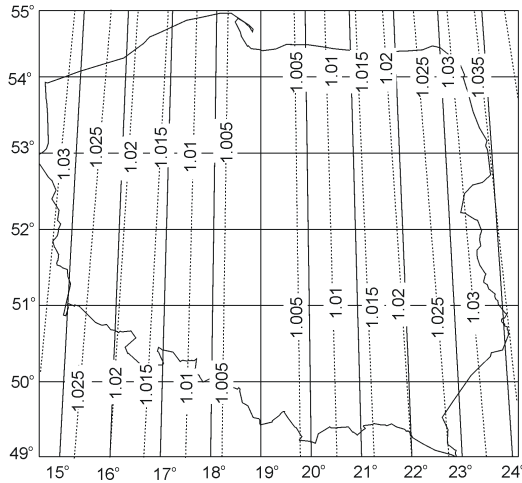
skale parametryczne

$$\mu_B = \sqrt{1 + L^2 \sin^2 B} \quad \mu_L = 1$$

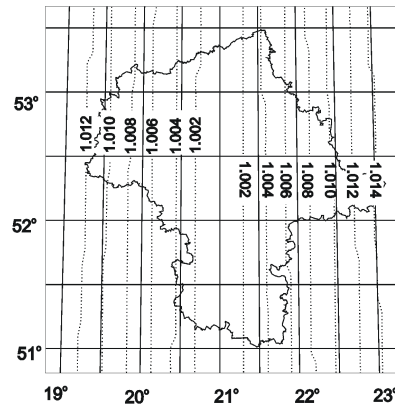
skala ekstremalna

$$m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 + L^2 \sin^2 B} + |L \sin B| \right)$$

Zniekształcenia odwzorowawcze długości w tym odwzorowaniu są o połowę mniejsze niż w odwzorowaniu walcowym. Dla obszaru Polski maksymalne zniekształcenia długości wynoszą ok. 35 m/km na południu i północy kraju. Maksymalne zniekształcenia kątowe wynoszą ok. 4°. Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 14 m/km, a zniekształcenia kątów 1,6°.



Rys. 5. Izoskale długości w odwzorowaniu sinusoidalnym równopółowym Polski



Rys. 6. Izoskale długości w odwzorowaniu sinusoidalnym równopółowym województwa mazowieckiego

Odwzorowanie Bonne'a

Odwzorowanie Bonne'a elipsoidy w płaszczyznę ma postać:

$$\vec{r}' = \left[x = \frac{r_0}{\sin B_0} - \rho \cos \delta, y = \rho \sin \delta \right] \quad (6)$$

$$\rho = \frac{r_0}{\sin B_0} + S(B_0) - S$$

$$\delta = \frac{r\lambda}{\rho}$$

$$r = N \cos B$$

$$r_0 = N(B_0) \cos B_0$$

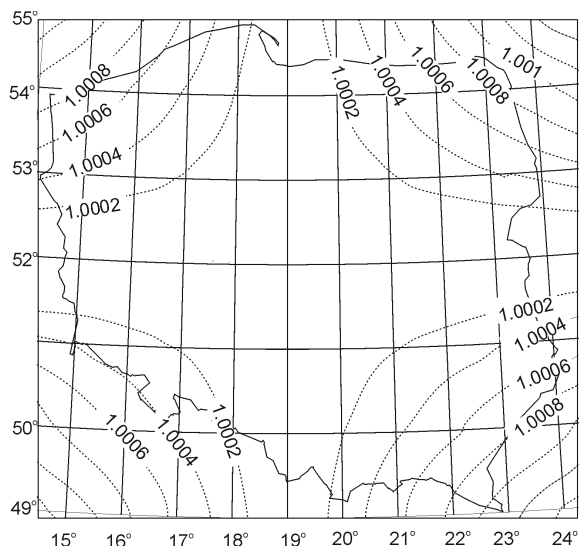
gdzie: $S(B_0)$ – długość łuku południka, N – promień przekroju poprzecznego,

skale parametryczne

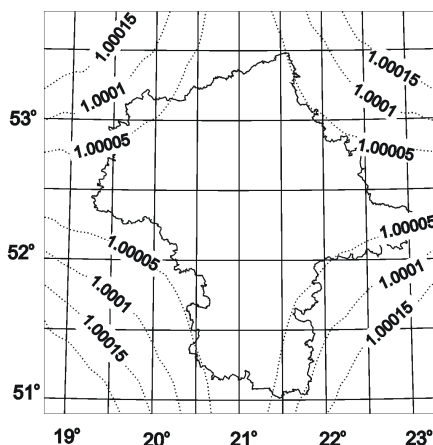
$$\mu_B = \frac{1}{\cos \varepsilon} \quad \tan \varepsilon = L \left(\sin B - \frac{r}{\rho} \right) \quad \mu_L = 1$$

skale ekstremalne

$$m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu_\varphi^2 + 3} + \sqrt{\mu_\varphi^2 - 1} \right)$$



Rys. 7. Izoskale długości w odwzorowaniu Bonne'a Polski



Rys. 8. Izoskale długości w odwzorowaniu Bonne'a województwa mazowieckiego

Zniekształcenia odwzorowawcze długości w tym odwzorowaniu są znacznie mniejsze niż w poprzednio zaprezentowanych odwzorowaniach. Dla obszaru Polski maksymalne zniekształcenia długości wynoszą ok. 1 m/km. Maksymalne zniekształcenia kątowe wynoszą ok. 6". Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 10 cm/km, a zniekształcenia kątów 41,2".

Odwzorowania stożkowe wyznaczone wg kryterium Kawrajskiego

Odwzorowania stożkowe elipsoidy w płaszczyznę możemy zapisać w następującej postaci:

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} x = q(B_0, c) - \rho(B, c) \cos[c(L - L_0)] \\ y = \rho(B, c) \sin[c(L - L_0)] \end{bmatrix}, c \in (0, 1) \quad (7)$$

gdzie:

- L_0 – ustalona wartość parametru L , długość geodezyjna południka osiowego,
- B_0 – ustalona wartość parametru B ,
- c – parametr, tzw. stała odwzorowania stożkowego, przy czym stała c zawiera się w przedziale $(0, 1)$.

$$\rho = \sqrt{\frac{2C}{c} - \frac{2}{c} S(B)}$$

$$S(B) = \frac{a^2(1-e^2)}{2e} \left(\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \left| \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right| \right)$$

Stałe C oraz c wyznaczone na podstawie kryterium Kawrajskiego:

$$\mu_L|_{B=B_S} = \mu_L|_{B=B_N} = \mu_L^{-1}|_{B=B_0}$$

gdzie:

μ_L – skala długości w kierunku równoleżnika,

B_S oraz B_N – szerokości geograficzne skrajnych równoleżników danego obszaru,

B_0 – taka wartość B , dla której M_L w zależności od B – osiąga minimum.

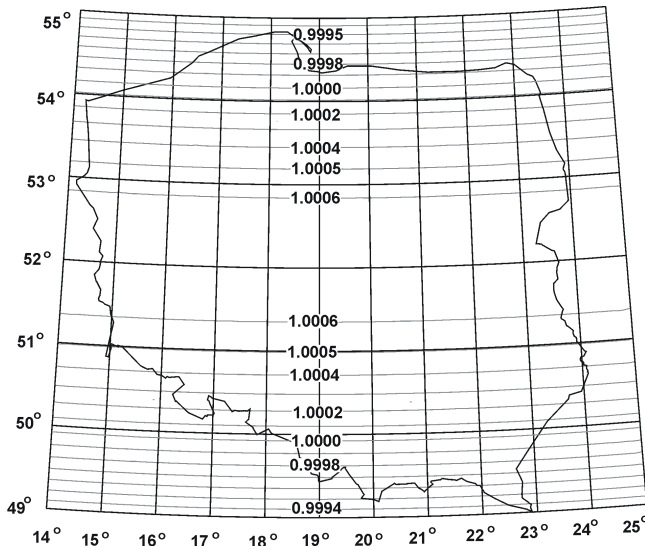
$$C = \frac{N_N^2 \cos^2 B_N S(B_S) - N_S^2 \cos^2 B_S S(B_N)}{N_N^2 \cos^2 B_N - N_S^2 \cos^2 B_S}$$

$$c = \frac{1}{2} \frac{N_N \cos B_N N_0 \cos B_0}{\sqrt{[C - s(B_N)] [C - s(B_0)]}}$$

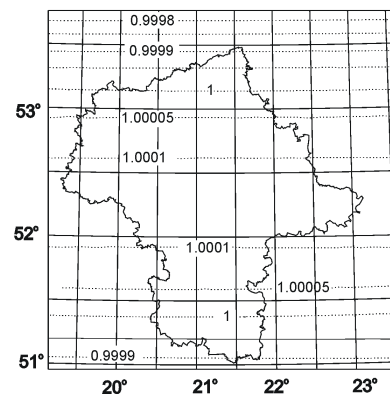
$$m = \mu_B = - \frac{d\rho}{MdB}$$

$$\frac{d\rho}{dB} = - \frac{\frac{dS(B)}{dB}}{c \sqrt{\frac{2C}{c} - \frac{2S(B)}{c}}}$$

W odwzorowaniach stożkowych opracowanych wg kryteriów Kawrajskiego izoskale mają postać łuków okręgów równoległych do obrazów równoleżników. Maksymalne zniekształcenia długości występują na południu i północy Polski i wynoszą ok. +60 cm/km. Maksymalne zniekształcenia kątów wynoszą ok. 4'. Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 10 cm/km, a zniekształcenia kątów 41,2".



Rys. 9. Izoskale długości w odwzorowaniu stożkowym Kawrajskiego Polski



Rys. 10. Izoskale długości w odwzorowaniu stożkowym Kawrajskiego województwa mazowieckiego

Odzworowanie złożone

Proponowane odzworowanie składa się dwóch odzworowań cząstkowych. Pierwsze, to odzworowanie równopolowe elipsoidy na sferę:

$$\varphi(B) = \arcsin \left\{ \frac{a^2(1-e^2)}{2R^2} \left[\frac{\sin B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right) \right] \right\}, \quad \lambda = L \quad (8)$$

o promieniu R wyznaczonym z równania

$$(R^2)^2 - (N^2 \cos^2 B_s) R^2 - \frac{1}{4} a^4 (1-e^2)^2 \left[\frac{\sin B_s}{1-e^2 \sin^2 B_s} + \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1+e \sin B_s}{1-e \sin B_s} \right) \right]^2 = 0$$

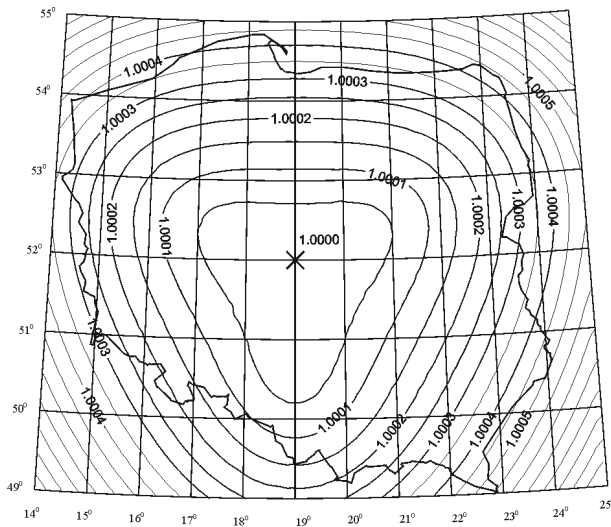
Drugie, to odzworowanie ukośne azymutalne Lamberta o promieniu R :

$$\vec{r}' = [\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha] \quad (9)$$

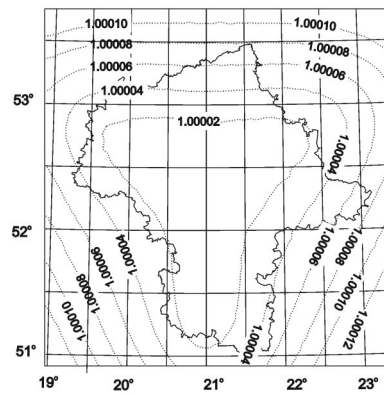
$$\rho = 2R \sin \left(45^\circ - \frac{h}{2} \right)$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \varphi_G + \cos \varphi \cos \varphi_G \cos(\lambda - \lambda_G)$$

$$\tan(\alpha - \alpha_N) = \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_G)}{\sin \varphi \cos \varphi_G - \cos \varphi \sin \varphi_G \cos(\lambda - \lambda_G)}$$



Rys 11. Izoskale długości w odzworowaniu złożonym równopolowym Polski



Rys 12. Izoskale długości w odzworowaniu złożonym województwa mazowieckiego

W odwzorowaniu Polski złożonym z odwzorowania równopolowego elipsoidy na sferę oraz sfery na płaszczyznę uzyskujemy maksymalne zniekształcenia odwzorowawcze rzędu ok. 55 cm/km. Rozkład zniekształceń w tym odwzorowaniu ilustruje rysunek 11. Zniekształcenia kątów wynoszą ok. 3,4'. Natomiast dla województwa mazowieckiego zniekształcenia długości wynoszą 8 cm/km, a zniekształcenia kątów 33".

Analiza wpływu zniekształceń odwzorowawczych na wartość wyznaczanych pól powierzchni wieloboków

W opisanych w poprzednim rozdziale odwzorowaniach przeprowadzono obliczenia pól powierzchni wieloboków. Wieloboki utworzono w oparciu o współrzędne punktów leżących na granicy Polski. Obliczenia wykonano dla 5 wieloboków, w których średnie odległości pomiędzy wierzchołkami wyniosły odpowiednio 9 km, 2 km, 1 km, 0,5 km i 0,3 km. W tabeli 1 zamieszczono wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w poszczególnych odwzorowaniach równopolowych oraz w układzie „1992”.

Tabela 1. Wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach kartograficznych Polski

Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole powierzchni 1 [m ²]	Pole powierzchni 2 [m ²]	Pole powierzchni 3 [m ²]	Pole powierzchni 4 [m ²]	Pole powierzchni 5 [m ²]
Walcowe	70 m/km	312 554 066 331	312 556 115 161	312 556 217 604	312 556 243 215	312 556 249 618
Azymutalne	67 m/km	312 557 210 821	312 556 311 694	312 556 266 737	312 556 255 498	312 556 252 689
Sansona	35 m/km	312 550 778 174	312 555 909 656	312 556 166 228	312 556 230 371	312 556 246 407
Bonne'a	1m/km	312 555 647 854	312 556 214 009	312 556 242 316	312 556 249 393	312 556 251 163
Kawrajskiego	60 cm/km	312 555 691 970	312 556 216 766	312 556 243 005	312 556 249 565	312 556 251 206
Złożone	55 cm/km	312 555 667 747	312 556 215 251	312 556 242 627	312 556 249 471	312 556 251 182
Układ 92	70 cm/km	312 351 252 481	312 351 602 881	312 351 620 401	312 351 624 781	312 351 625 877

Wykonano również obliczenia dla wieloboku utworzonego w oparciu o współrzędne punktów leżących na granicy województwa mazowieckiego. Średnie odległości pomiędzy punktami wyniosły 0,5 km. W tabeli 2 zamieszczono wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w poszczególnych odwzorowaniach równopolowych oraz w układzie „1992” i „2000”.

Na podstawie uzyskanych wyników możemy zauważyć kilka występujących prawidłowości. Przy większych odległościach między wierzchołkami występują większe rozbieżności pomiędzy obliczonymi wartościami pól powierzchni. Wynika to z niegeodezyjności odwzorowań kartograficznych.

Im mniejsze odległości i mniejsze zniekształcenia, tym wpływ niegeodezyjności odwzorowań jest coraz mniejszy. Możemy zauważyć, że w odwzorowaniach charakteryzujących się niewielkimi zniekształceniami, tj. Bonne'a, Kawrajskiego i złożonym Lamberta różnice wynoszą jedynie kilkadziesiąt metrów kwadratowych dla obszaru Polski oraz dochodzą do kilku metrów dla województwa mazowieckiego.

Obliczając pola powierzchni w odwzorowaniach równopolowych (tab. 1 i 2) możemy uzyskać znaczne różnice, pomiędzy obliczonymi polami powierzchni wieloboków opartych

Tabela 2. Wyniki obliczeń pól powierzchni wieloboków w wybranych odwzorowaniach kartograficznych województwa mazowieckiego

Odwzorowanie	Zniekształcenia długości	Pole powierzchni [m ²]
Walcowe	70 m/km	35 586 539 638
Azymutalne	57 m/km	35 586 533 833
Sansona	14 m/km	35 586 536 254
Bonne'a	10 cm/km	35 586 534 858
Kawrajskiego	10 cm/km	35 586 534 880
Złożone	8 cm/km	35 586 534 877
Układ 92	70 cm/km	35 557 049 616
Układ 2000	16 cm/km	35 583 510 055

na tych samych wierzchołkach. Niemniej jednak uzyskujemy na pewno większą dokładność obliczonego pola powierzchni niż w odwzorowaniach konforemnych, np. w układzie „1992”. W pracach geodezyjnych i kartograficznych mamy do czynienia z wielobokami, których boki stanowią odcinki linii geodezyjnych. W odwzorowaniach kartograficznych obrazami linii geodezyjnych nie są linie proste lecz pewne krzywe. Wykorzystując więc odwzorowania równopolowe do obliczania pól tych wieloboków należy mieć świadomość, że pole powierzchni geodezyjnego wieloboku elipsoidalnego jest zachowane, ale jego odpowiednikiem obrazowym jest pewien wielobok krzywoliniowy. Chcąc uzyskać zgodność obliczonych powierzchni pomiędzy oryginałem a obrazem w odwzorowaniach kartograficznych w płaszczyźnie odwzorowania, należy całkować pole powierzchni krzywoliniowego wieloboku. Występuje więc konieczność uwzględniania redukcji pól powierzchni. Problem ten można minimalizować przez zmniejszanie odległości pomiędzy wierzchołkami oraz dobór parametrów odwzorowania w celu zmniejszenia zniekształceń odwzorowawczych, a tym samym wartości redukcji pól.

Literatura

Snyder J., 1987: Map projections – A working manual, U.S Geological Survey.

Abstract

Calculation of areas of geodetic polygons is one of the basic tasks undertaken in geodetic and cartographic works. This problem appears in many tasks, for instance connected running real estate cadastre or in calculation of areas of administrative units e.g. in the State Register of Borders. These works become particularly important now, when we use new geocentric ellipsoids WGS84 and GRS80. Calculation of the area of a polygon on an ellipsoid is quite complicated, because there are no precise formulas for realization of such a task. There are only approximate formulas applicable to small areas. Calculation problems appear in the case of large polygons located on rotating oblate ellipsoids which require the use of non-standard algorithms.

One possibility is an attempt to use equal-area projections. Transformation of coordinates of the vertices of geodetic polygons from the plane of coordinates used in practice into the plane of equal-area projection allows calculating the area of ellipsoidal polygons directly on that plain. The problem of non-geodetic nature of this projection then emerges which affects accuracy of calculations. This problem may be minimized by seeking projections with as small as possible projection distortions.

In the paper, a review of criteria of equal-area projections is presented as well as their use for projection of selected geodetic polygons. Impact of projection distortions on the value of calculated polygon areas has been also presented.

dr hab. inż. Paweł Pędzich
p.pedzich@gik.pw.edu.pl

mgr inż. Marta Kuźma
mkuzma@vp.pl