

ALGEBRAICZNE PRZEKSZTAŁCENIA DANYCH TOPOLOGICZNYCH MAPY EWIDENCYJNEJ

ALGEBRAIC TRANSFORMATIONS OF CADASTRAL MAP TOPOLOGY DATA

Elżbieta Lewandowicz

Katedra Geodezji Szczegółowej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Słowa kluczowe: dane przestrzenne, katastralne obiekty przestrzenne, topologia
Keywords: spatial data, cadastral spatial objects, topology

Wprowadzenie

W teorii informacji geograficznej, w funkcjonujących systemach GIS, zakłada się, że geometrię obiektów przestrzeni geograficznej można przedstawić jako elementy przestrzeni topologicznej za pomocą grafów z ich węzłami, krawędziami, obszarami (ISO 19107; ESRI, 2003; Autodesk, 2000; Chrobak, 2000). W oparciu o te elementy, proponuje się budowę modeli topologicznych, które w literaturze przedstawiane są w formie tabelarycznej (Gaździcki, 1990; 2006; Molenaar, 1998; Eckes, 2006; Bielecka, 2006). Wykorzystując teorię grafów, dane topologiczne można zapisać w postaci macierzowej (Gould, 1988; Wilson, 2000; Lewandowicz, 2009). Ten algebraiczny zapis pozwala na przekształcenia danych w celu uzyskania nowych danych.

W poprzednich publikacjach (Lewandowicz, 2007; 2009), przetwarzanie danych topologicznych za pomocą algebraicznych przekształceń, przedstawiono w celu uzyskania informacji mówiącej o sąsiedztwie elementów geometrycznych mapy numerycznej. W tym celu wykonując mnożenia macierzy sprowadzono dziedzinę wartości elementów iloczynów do dwuelementowego zbioru $\{0,1\}$ (przez eliminowanie – zerowanie danych diagonalnych lub dzielenie wartości dodatnich elementów macierzy przez ich wartości):

macierz sąsiedztwa obszarów

$$S_{O-O} = S_{O-L} (S_{O-L})^T - \text{Diag} (S_{O-L} (S_{O-L})^T) \quad (1)$$

macierz sąsiedztwa linii:

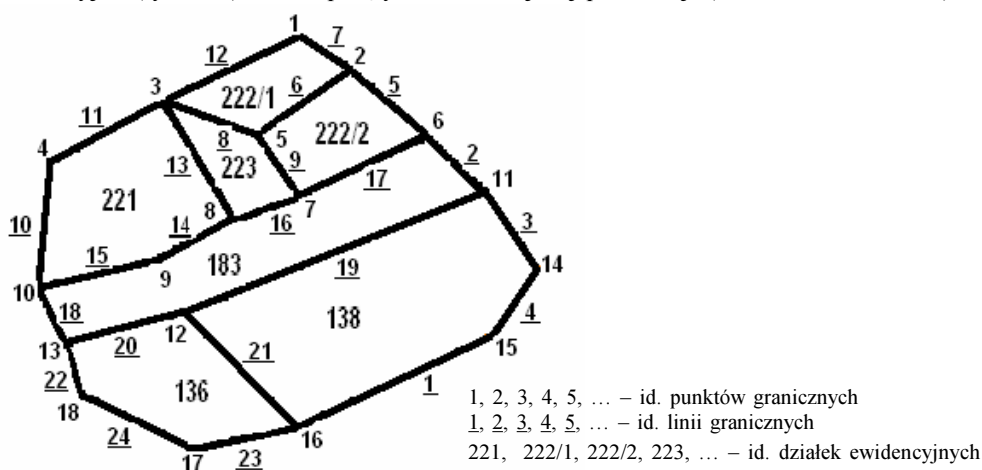
$$S_{L-L} = ((S_{P-L})^T S_{P-L} - \text{Diag} ((S_{P-L})^T S_{P-L})) \quad (2)$$

macierz sąsiedztwa węzłów i obszarów:

$$S_{P-O} = (S_{O-L} (S_{P-L})^T) / 2 \quad (3)$$

Eliminowane wartości niosły za sobą istotną treść informacyjną.

W artykule skupiono się na przekształceniach algebraicznych wykonywanych w celu automatycznego ujawnienia cech geometrycznych i topologicznych obiektów geograficznych oraz ich wzajemnych relacji. W wyniku tych działań otrzymuje się nowe parametry opisujące geometrię obiektów geograficznych. Uzyskane dane, w sposób automatyczny, powinny uzupełniać informacje opisowe o obiektach mapy numerycznej. Treści teoretyczne zaprezentowano w oparciu o prosty przykład danych geometrycznych, przedstawiający działki ewidencyjne (rysunek), zaczerpnięty z wcześniejszej publikacji (Lewandowicz, 2004).



Rysunek. Szkic działek ewidencyjnych z identyfikatorami działek, punktów granicznych i linii granicznych

Podstawy teoretyczne

W literaturze GIS dane topologiczne przedstawia się w formie tabelarycznej (Gaździcki, 1990; Bielecka, 2007; Eckes, 2007), a w publikacjach (Lewandowicz, 2007; 2009), wskazywano na możliwości ich macierzowego zapisu. Tym razem w oparciu o szkic danych ewidencyjnych (rysunek), zapisano je w formie tabelarycznej (tab. 1, 2) i macierzowej (4, 5, 6). W zastosowaniach praktycznych istotne są dwie tabele topologiczne:

- 1 – z danymi o połączeniach linii i punktów granicznych, zapisana jako macierz S_{L-P} ,
- 2 – z danymi o wielobokach i liniach granicznych, zapisana jako macierz S_{O-L} .

Tabela 1. Powiązania linii i punktów

id linii	punkty
5	2, 6
6	2, 5
7	1, 2
8	3, 5
9	5, 7
10	4, 10
...	...

Tabela 2. Powiązania obszarów i linii

=id wieloboku	linie
222/2	5, 17, 9, 6
223	8, 9, 16, 13
221/1	12, 7, 6, 8
...	..., ..., ...

Macierz S_{L-P} zawiera dane o połączeniach linii (krawędzi) z punktami (węzłami). Elementy macierzy (4) $(S_{L-P})_{ij}$ przyjmują wartości 1, jeśli linia graniczna (krawędzi) i ma początek lub koniec w punkcie granicznym (węźle) j :

$$S_{L-P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \end{array} \quad (4)$$

W teorii grafów powszechnie opisuje się transpozę macierzy (S_{L-P}) , nazywa się ją macierzą incydencji (5):

$$S_{P-L} = (S_{L-P})^T \quad (5)$$

Zawiera ona dane o powiązaniach punktów z liniami.

Macierz S_{O-L} – zwana macierzą oczek, w przedstawionym przykładzie zawiera informacje o powiązaniach obszarów działek ewidencyjnych z liniami granicznymi. Elementy macierzy (6) $(S_{O-L})_{ij}$ przyjmują wartość 1, jeśli obszar działki i jest ograniczony linią graniczną j , zgodnie ze szkicem ewidencyjnym (rysunek) i zapisem w tabeli 2.

$$S_{O-L} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} \dots & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \dots \\ 222/1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 222/2 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 223 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \end{array} \quad (6)$$

Algebraiczne przetwarzanie danych topologicznych

Dane wyjściowe stanowią macierze S_{L-P} , S_{P-L} , S_{O-L} , opisane wyżej. Zawierają dane topologiczne zapisane w formie algebraicznej. Elementy tych macierzy (4, 5, 6) przyjmują wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$.

Wykonano podstawowe działania na wyjściowych macierzach, przemnożono je przez siebie. Pierwszy iloczyn $(S_{P-L})(S_{L-P})$ zapisano jako S_{P-P} :

$$S_{P-P} = (S_{P-L})(S_{L-P}) \quad (7)$$

Wartości diagonalne macierzy $(S_{P-P}) : (s_{P-P})_{ii}$ zawierają informacje o liczbie linii granicznych dochodzących do punktów granicznych (8). Wartość $(s_{P-P})_{ii}$, w teorii grafów, zwana jest stopniem wężła. W naszym przypadku można mówić o stopniu punktu granicznego.

Mnożenie macierzy niesymetrycznych nie jest działaniem przemennym. Iloczyn $(S_{L-P})(S_{P-L})$ przedstawia macierz symetryczną sąsiedztwa krawędzi $S_{(L-L)}$ (12):

$$S_{(L-L)} = (S_{L-P})(S_{P-L}) \quad (12)$$

Wartości diagonalne macierzy (12, 13) przyjmują wartości równe 2 – wskazujące na powiązania krawędzi z dwoma punktami granicznymi. Wartości pozadiagonalne, równe 1, wskazują na powiązania dwóch sąsiednich krawędzi jednym wspólnym punktem granicznym. Wartości równe 0, wskazują na brak sąsiedztwa.

$$S_{(L-L)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{array} & \dots \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (13)$$

Kolejny iloczyn:

$$S_{(O-O)}^L = (S_{O-L})(S_{O-L})^T \quad (14)$$

zawiera dane związane z geometrią działek ewidencyjnych. Wartości diagonalne (15) dostarczają informacji o liczbie linii granicznych opisujących obszar działki ewidencyjnej. Wartości pozadiagonalne przyjmują wartość równą 0, gdy działki o identyfikatorach i i j nie sąsiadują ze sobą bezpośrednio wspólną linią graniczną. Wartości, $(s_{(O-O)}^L)_{ij} = n, n > 0$ stanowią o liczbie wspólnych odcinków linii granicznych dwóch sąsiadujących działek, o identyfikatorach i, j .

$$S_{(O-O)}^L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 221/1 & 222/2 & 223 & 221 & 183 & 136 & 138 \\ \begin{array}{c} 221/1 \\ 222/2 \\ 223 \\ 221 \\ 183 \\ 136 \\ 138 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (15)$$

Wartości macierzy (15) $(s_{(O-O)}^L)_{ij} = n, n > 0$ wskazują także na sąsiedztwo bezpośrednie działek – pierwszego stopnia (Lewandowicz, 2006). Można tę informację zapisać w postaci uproszczonej, przez transformację macierzy:

$$(S_{(O-O)}^L) \rightarrow S_O^L \quad (16)$$

$$S_O^L = (S_{(O-O)}^L) - \text{Diag}((S_{(O-O)}^L)) \quad (17)$$

oraz gdy:

$$(s_{(O-O)}^L)_{ij} > 0 \Rightarrow (s_O^L)_{ij} = ((s_{(O-O)}^L)_{ij} / (s_{(O-O)}^L)_{ij}) \quad (18)$$

Elementy macierzy S_O^L przyjmują wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ i mają wyzerowane wartości diagonalne. W celu uzyskania informacji o sąsiedztwie pośrednim n stopnia, należy macierz S_O^L podnosić do kolejnych potęg $n, (S_O^L)^n$. Wartości dodatnie elementów macierzy $(S_O^L)^n$ wskazywać będą na istnienie pośredniego sąsiedztwa n stopnia między działkami o identyfikatorach i, j (wyznaczonego w oparciu o linie graniczne (Lewandowicz, 2006)).

Wracając do macierzy podstawowych wykonano kolejne działanie:

$$S_{O-P} = (S_{O-L})(S_{L-P}) \quad (19)$$

Wartości elementów iloczynu S_{O-P} przyjmują wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0, 2\}$. Wartości 2 wynikają z powiązań linii z punktami (linia jest wyznaczona dwoma punktami). Podzielenie ich przez 2 – daje w efekcie macierz wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ (20, 21).

$$S_{O-P}^* = (S_{O-L})(S_{L-P}) / 2 \quad (20)$$

Jeśli element macierzy (21) $(S_{O-P}^*)_{ij}$ przyjmuje wartość 1, to znaczy, że punkt graniczny j wyznacza linie graniczne obszaru działki i .

$$S_{O-P}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 222/1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 222/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 223 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 221 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 183 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 138 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \end{array} \quad (21)$$

Przemnożona przez siebie macierz S_{O-P}^* , w efekcie daje iloczyn (22), który zawiera informacje o relacjach geometrycznych działek ewidencyjnych i punktów granicznych:

$$(S_{(O-O)}^P) = ((S_{O-P})(S_{O-P})^T) = ((S_{O-L})(S_{L-P})) / 2 (((S_{O-L})(S_{L-P})) / 2)^T \quad (22)$$

W macierzy $(S_{(O-O)}^P)$ elementy diagonalne (23) opisują liczbę punktów granicznych wyznaczających obszary działek ewidencyjnych. Wartości pozadiagonalne opisują liczbę wspólnych punktów granicznych sąsiadujących działek. Wartości równe 1 wskazują na sąsiedztwo działek ewidencyjnych na wskroś – jednym punktem granicznym. Takiego sąsiedztwa nie udało się wykazać w poprzednim przykładzie – w oparciu o dane macierzy $(S_{(O-O)}^P)$ (15).

$$(S_{(O-O)}^P) = \begin{array}{c|ccccccc} & 222/1 & 222/2 & 223 & 221 & 183 & 136 & 138 \\ \hline 222/1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 222/2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 223 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 221 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 183 & 0 & 2 & 2 & 3 & 8 & 2 & 2 \\ 136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 138 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \end{array} \quad (23)$$

Zastosowania

Przedstawione przekształcenia danych topologicznych wskazują na możliwość automatycznego uzyskania informacji uzupełniającej opis geometryczny działek ewidencyjnych. W systemach GIS tradycyjnie przedstawia się informację o powierzchni działki i całkowitej długości granic, a można by ją uzupełnić informacjami o liczbie punktów granicznych i linii granicznych. Dane te powinny być uwzględniane w opisie danych ewidencyjnych i brane pod uwagę przy analizach struktur ewidencyjnych. Dane o sąsiedztwie działek i wspólnych liniach granicznych przydatne są w procedurach związanych z agregacją działek.

Przedstawione przekształcenia algebraiczne, w rozwiązaniach praktycznych (Cormen i in., 2007), wiążą się z przeszukiwaniem i zliczaniem danych w tabelach lub listach ze zbiorami danych topologicznych.

Literatura

- Autodesk, 2000: Podręcznik użytkownika.
- Bielecka E., 2006: System informacji geograficznej. Wydawnictwo PJWSTK, Warszawa, s. 37-44.
- Chrobak T., 2000: Modelowanie danych przestrzennych przy użyciu struktury FDS Molenaara. Materiały II Ogólnopolskiego Seminarium „Modelowanie danych przestrzennych”, Warszawa, s. 17-28.
- Cormen T. H., Leiserson Ch. E., Rivest R. L., Stein C., 2007: Wprowadzenie do algorytmów. WNW, Warszawa.
- Eckes K., 2006: Modelowanie rzeczywistości geograficznej w systemach informacji przestrzennej. *Roczniki Geomatyki* t. IV, z. 2, s. 43-73. PTIP, Warszawa.
- ESRI, 2003: ArcGIS: Working With Geodatabase Topology, An ESRI White Paper.
- Findeisen W., Gutowski W, Kulikowski J.L., i in., 1980: Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce. Biblioteka Naukowa Inżyniera PWN, Warszawa, s. 15-95, 185-212, 254-306.
- Gaździcki J., 1990: Systemy Informacji Przestrzennej. Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa.
- Gaździcki J., 2006: Internetowy leksykon geomatyczny. <http://www.ptip.org.pl/>
- Gould R., 1988: Graph theory. The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC California.
- ISO 19107: Geographic information spatial schema <<http://www.isotc211.org/>>
- Kulikowski J.L., 1986: Zarys teorii grafów. Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Lewandowicz E., 2004: Identification of maximal complex boundaries on the basis of subregion description with directed graphs (digraphs). *Geodesy and Cartography*, Polish Academy of Sciences, Committee for Geodesy, Vol. 53, No3/4, 159-172.
- Lewandowicz E., 2006: Area Neighborhood Models. *Geodezja i Kartografia*; Polish Academy of Sciences, Geodesy and Cartography, Vol.55, No 3, 147-167.
- Lewandowicz E., 2007: Modele topologiczne danych przestrzennych. *Roczniki Geomatyki*, t. V, z. 5, 43-53. PTIP, Warszawa.

- Lewandowicz E., 2009: Dane katastralne jako baza do rozbudowy modelu sieci drogowej. *Roczniki Geomatyki* t. VII, z. 5 (35), 97-102. PTIP, Warszawa.
- Molenaar M., 1998: An introduction to the theory of spatial object modeling for GIS. Taylor & Francis, London.
- Sullivan D.O., Unwin D.J., 2003: Geographic Information Analysis. Jon Wiley & Sons, INC.
- Wilson R., 2000: Wprowadzenie do teorii grafów. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Abstract

In the paper, algebraic transformations of topological data are presented with the aim to obtain additional information to enrich geometric description of the objects in digital maps – registered plots. The data recorded in topological tables contain information about mutual relationships between geometric elements: points, lines and area. From these data not only the information about the relationships may be obtained, but also quantitative dependences may be drawn, e.g. about the number of points and border lines describing the registered plots. These data are useful in description and analysis of geometric structures of registration data.

The practical part of the paper was based on a simple example of geometric data presenting a complex of registered plots. Topological data recorded in the tables were transferred into a matrix form practicable for algebraic transformations. By performing algebraic transformations e.g. multiplication and exponentiation of matrices new data were obtained. They contained quantitative information which was described in detail. They may be verified on the basis of the graphic example presented.

dr hab. inż. Elżbieta Lewandowicz
lella@uwm.edu.pl
www.ela.mapa.net.pl
tel. +48 89 523 44 67
fax +48 89 523 48 48